Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2017-09-04 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\binom{18}{16}$. (1 p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{202}(2+5k)$. (1 p)

   (c) Bestäm absolutbeloppet av $z = \dfrac{2-i}{3+i} - \overline{2+2i}$. (1 p)

2. Lös olikheten $\dfrac{x}{2-x} \leq \dfrac{1}{x}$.

3. Lös ekvationen $x\sqrt{3} + \sqrt{5-2x} = 2\sqrt{3}$.

4. Bestäm eventuella skärningspunkter mellan cirkeln med centrum i $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och radie 3 och linjen genom $(4, -3)$ och $(-3, 11)$. För full poäng krävs en lagom stor och omsorgsfullt ritad figur.

5. Bestäm resten då polynomet $p(x) = x^{99} - 4x^{97} - 3x^{38} - 16x^{34} + 4x^3 - 2x + 10$ divideras med $x^2 + 4$.

Lösningsförslag TATM79 2017-09-04

1. (a) Direkt från definitionen av binomialkoefficienter erhåller vi

$$\binom{18}{16} = \binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

(b) Summan är aritmetisk med 200 termer, så

$$\sum_{k=3}^{202} (2+5k) = \frac{17+2+5\cdot 202}{2} \cdot 200 = 1029 \cdot 100 = 102900.$$

(c) Först skriver vi om z på formen $a+ib$ (med $a, b \in \mathbf{R}$):

$$z = \frac{2-i}{3+i} - \overline{2+2i} = \frac{(2-i)(3-i)}{10} - (2-2i) = \frac{1}{2} - 2 + i(-\frac{1}{2} + 2) = -\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}.$$

Därmed blir $|z| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Svar. (a) 153 (b) 102900 (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{x}{2-x} \le \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-(2-x)}{x(2-x)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)} \ge 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-2		0		1		2	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)}$	$+$	0	$-$	☠	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x \le -2$, $0 < x \le 1$ eller $x > 2$.

Svar: $x \le -2$ eller $0 < x \le 1$ eller $x > 2$.

3. Låt oss stuva om i ekvationen för att sedan kvadrera båda leden (observera att det då bara blir en implikation!):

$$\begin{aligned} x\sqrt{3} + \sqrt{5-2x} = 2\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{5-2x} = (2-x)\sqrt{3} \\ &\Rightarrow \quad 5-2x = (2-x)^2 \cdot 3 = 12 - 12x + 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x + 7 = 3\left(x - \frac{7}{3}\right)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{3} \quad \text{eller} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 1$ ser vi att

$$\text{VL} = \sqrt{3} + \sqrt{5-2} = 2\sqrt{3} \quad \text{och} \quad \text{HL} = 2\sqrt{3}$$

så $x = 1$ är en lösning. Om $x = \frac{7}{3}$ är

$$\text{VL} = \frac{7}{3}\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\cdot\frac{7}{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad \text{och} \quad \text{HL} = 2\sqrt{3}.$$

Eftersom vänsterled och högerled inte stämmer överens så är detta ingen lösning.

Svar: $x = 1$.

4. Cirkeln kan beskrivas med ekvationen

$$\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9$$

och linjen som går genom $(4, -3)$ och $(-3, 11)$ har ekvationen $y = -2x + 5$ (två-punktsformeln tex). Vi söker skärningspunkter mellan linjen och cirkeln, så både linjens och cirkelns ekvation måste uppfyllas samtidigt. Således måste följande gälla:

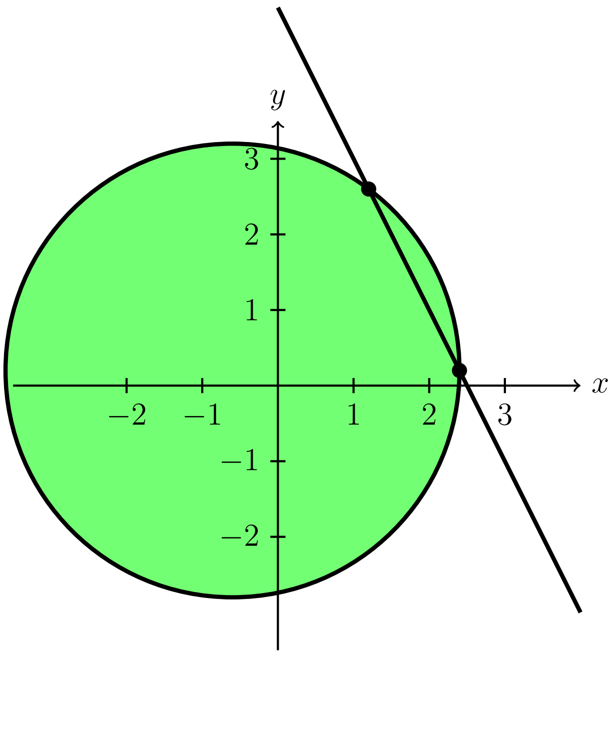
$$9 = \left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2x + 5 - \frac{1}{5}\right)^2 = x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} + 4x^2 - \frac{96}{5}x + \frac{24^2}{25} = 5x^2 - 18x + \frac{117}{5}.$$

Vi löser denna ekvation:

$$\begin{aligned} 9 = 5x^2 - \frac{90}{5}x + \frac{585}{25} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{72}{25} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{9}{5}\right)^2 + \frac{72-81}{25} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{5} \pm \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Alltså blir de sökta x-koordinaterna $x = \frac{12}{5}$ respektive $x = \frac{6}{5}$. Eftersom vi söker punkter på linjen $y = -2x + 5$ så erhåller vi skärningspunkterna $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och $\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



Svar: $\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$ och $\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

5. Låt oss betrakta polynomet för komplexa variabler. Således är

$$p(z) = z^{99} - 4z^{97} - 3z^{38} - 16z^{34} + 4z^3 - 2z + 10.$$

Låt $q(z) = z^2 + 4$. Då $p(z)$ har grad 99 följer det att det finns ett polynom $k(z)$ med grad 97 och ett polynom $r(z)$ med grad ≤ 1 så att $p(z) = k(z)q(z) + r(z)$ för alla z. Vi ansätter att $r(z) = az + b$. Enligt föregående formel gäller då

$$p(z) = k(z)(z^2 + 4) + az + b.$$

Speciellt är denna ekvation sann för $z = \pm 2i$. Eftersom $(2i)^2 + 4 = 0$ följer det då att

$$\begin{aligned} a \cdot 2i + b = p(2i) &= -i2^{99} - 4i2^{97} + 3 \cdot 2^{38} + 16 \cdot 2^{34} - 4i2^3 - 4i + 10 \\ &= 2^{40} + 10 + (-2^{100} - 36)i. \end{aligned}$$

Eftersom både $p(x)$ och $q(x)$ är reella måste $r(x)$ också vara reell. Det innebär att $a, b \in \mathbf{R}$. Ekvationen ovan medför då att

$$2a = -2^{100} - 36 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2^{99} - 18$$

och

$$b = 2^{40} + 10.$$

Svar: Resten blir $(-2^{99} - 18)x + 2^{40} + 10$.