Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2016-09-17 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Ange medelpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 = 10x$ samt en ekvation för cirkelns tangent i punkten $(3, \sqrt{21})$. (2 p)

   (b) Definiera $|z|$ om $z = a + ib$ där a, b är reella. (1 p)

2. Lös ekvationen $2|x - 5| - 3|3 - x| = 5x + 2$.

3. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{59} (-2)^{3k+2}$. (1 p)

   (b) I en aritmetisk summa med 200 termer är 3:e termen 40 och 13:e termen 36. Beräkna summan. (2 p)

4. Bestäm reella tal a, b, c, d så att $p(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ uppfyller villkoren $p(2 + i\sqrt{2}) = p(-3) = p(0) = 0$.

   Avgör också vilka reella x som löser olikheten $p(x) > 0$.

5. Lös olikheten $\dfrac{ax}{x-1} \leq x$ för alla värden på den reella konstanten a.

Lösningsförslag TATM79 2016-09-17

1. (a) Vi kvadratkompletterar uttrycket och finner att

$$x^2 + y^2 = 10x \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + y^2 = 25.$$

Centrum för cirkeln ligger alltså i $(5,0)$ och radien är 5. Vi söker ekvationen för cirkelns tangent L_1 i punkten $(3, \sqrt{21})$: $y = kx+m$. Vi vet att denna linje måste vara vinkelrät mot linjen L_2 som går genom cirkelns mittpunkt och tangeringspunkten. Lutningen l för L_2 kan enkelt beräknas som

$$l = \frac{\sqrt{21}-0}{3-5} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

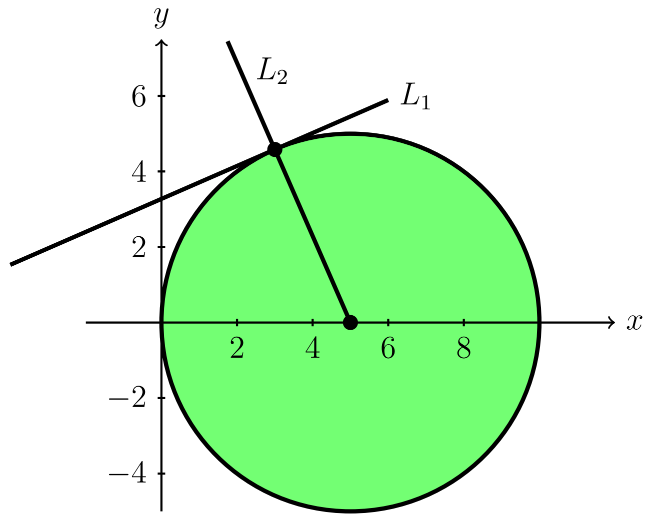
och eftersom $k \cdot l = -1$ så blir

$$k = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Punkten $(3, \sqrt{21})$ ligger på den sökta linjen, så

$$\sqrt{21} = \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot 3 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{21-6}{\sqrt{21}} = \frac{15}{\sqrt{21}}.$$

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



(b) Definition ges av $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Svar: (a) Cirkeln har mittpunkt $(5,0)$ och radie 5, tangentens ekvation är $y = \frac{1}{\sqrt{21}}(2x+15)$
(b) $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

2. Beloppen definieras enligt

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5, \\ 5-x, & x \leq 5 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |3-x| = \begin{cases} 3-x, & x \leq 3, \\ x-3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x=5$ och $x=3$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq 3$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(5-x) - 3(3-x) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4},$$

vilket ligger i rätt intervall ($x \leq 3$). Alltså är $x = -\dfrac{1}{4}$ en lösning.

Fall 2: $3 \leq x \leq 5$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(5-x) - 3(x-3) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{17}{10},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Ingen lösning.

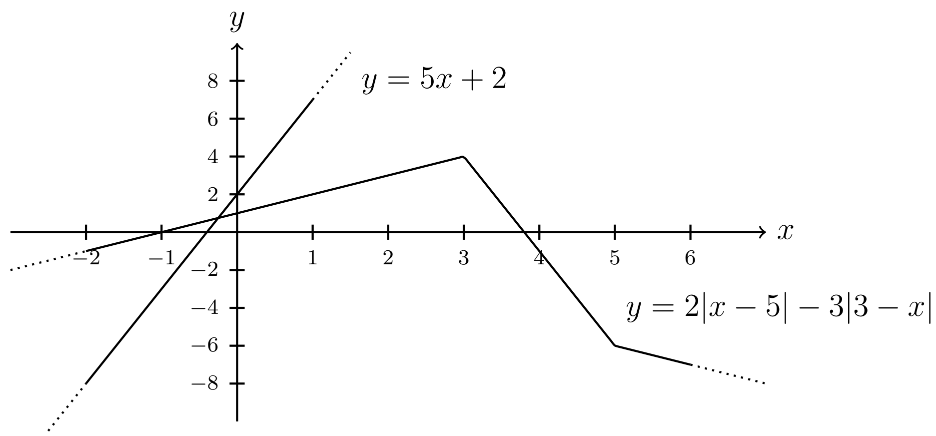
Fall 3: $x \geq 5$. Då är

$$2|x-5| - 3|3-x| = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-5) - 3(x-3) = 5x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning.

Svar: $x = -\dfrac{1}{4}$.

Man kan även skissa vänster- och högerled i en graf för att se om svaret verkar rimligt.



3. (a) Summan är geometrisk med kvoten -8, första term 4 och 60 termer. Enligt känd formel erhåller vi att

$$\sum_{k=0}^{59} (-2)^{3k+2} = 4 \cdot \frac{(-8)^{60} - 1}{-8-1} = \frac{4}{9}\left(1 - 8^{60}\right).$$

(b) Vi skriver summan som $\sum_{k=1}^{200} a_k$. Termerna måste ha formen $a_k = kd + c$, så den tredje termen blir $a_3 = 40 = 3d + c$ och den trettonde $a_{13} = 36 = 13d + c$. Alltså blir $10d = 36 - 40 = -4$ så $d = -2/5$. Vidare blir i så fall $40 = -6/5 + c$, vilket leder till att $c = 206/5$. Vi kan nu räkna ut första och sista termen: $a_1 = 204/5$ och $a_{200} = -194/5$. Känd formel för aritmetiska summor medför nu att

$$\sum_{k=1}^{200} a_k = \frac{a_1 + a_{200}}{2} \cdot 200 = \frac{204 - 194}{10} \cdot 200 = 200.$$

Svar: (a) $\dfrac{4}{9}\left(1 - 8^{60}\right)$ (b) 200.

4. Eftersom koefficienterna reella så måste rötter med nollskild imaginärdel förekomma som komplexkonjugerade par. Alltså måste även $p(2-i\sqrt{2})=0$, så

$$p(z)=z(z+3)(z-(2+i\sqrt{2}))(z-(2-i\sqrt{2}))=z(z+3)(z^2-4z+6)=z^4-z^3-6z^2+18z$$

uppfyller de krav som angivits i uppgiften. Identifikation av koefficienterna visar att talen kan väljas enligt $a=-1$, $b=-6$, $c=18$, samt $d=0$. För att lösa olikheten utnyttjar vi den faktoriserade formen ovan och skriver

$$0<p(x)=x(x+3)(x^2-4x+6)=x(x+3)((x-2)^2+2).$$

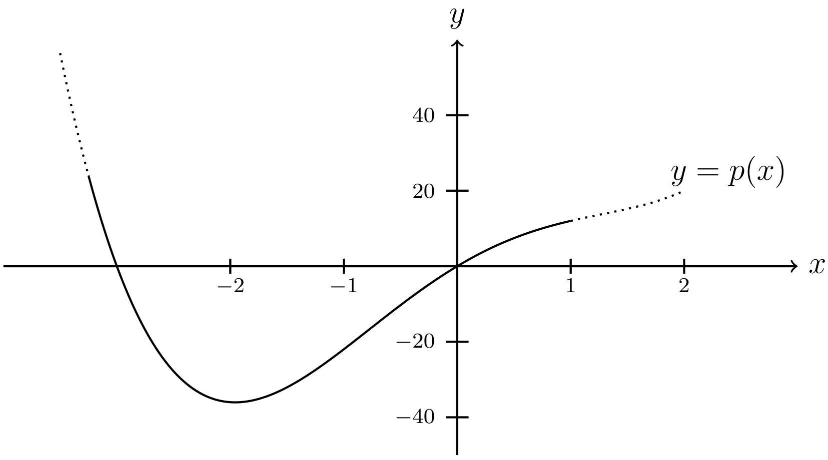
Vi gör ett teckenschema för högerledet.

		-3		0	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$(x-2)^2+2$	$+$		$+$		$+$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $x<-3$ eller $x>0$.

Svar: $a=-1$, $b=-6$, $c=18$, samt $d=0$; För $x<-3$ och $x>0$ är $p(x)>0$.

Grafiskt svarar intervallen ovan mot var $p(x)$ ligger strikt ovanför x-axeln. Man kan se detta genom att rita grafen $y=p(x)$ (hur skulle "grafen" $w=p(z)$ se ut?).



5. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{ax}{x-1}\le x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+(a+1)x}{x-1}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x(x-(a+1))}{x-1}\ge 0.$$

Vi ser här att det blir olika fall beroende på vilket värde $a\in\mathbf{R}$ har.

Fall 1. Om $a+1<0$. Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		$a+1$		0		1	
$x-(a+1)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $a + 1 \leq x \leq 0$ eller $x > 1$.

Fall 2. Om $a + 1 = 0$. Uttrycket reduceras i detta fall till $\dfrac{x^2}{x-1}$ och ett teckenschema kan skrivas upp.

		0		1	
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2}{x-1}$	$-$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x = 0$ eller $x > 1$.

Fall 3. Om $0 < a + 1 < 1$. Teckenschema:

		0		$a+1$		1	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-(a+1)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $0 \leq x \leq a + 1$ eller $x > 1$.

Fall 4. Om $a+1 = 1$. Uttrycket reduceras till $x \geq 0$, men på grund av ursprungsformuleringen måste $x \neq 1$ fortfarande gälla. Så olikheten är med andra ord sann precis då $x \geq 0$ med $x \neq 1$.

Fall 5. Om $a + 1 > 1$. Vi ritar ett teckenschema.

		0		1		$a+1$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-(a+1)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x-(a+1))}{x-1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $0 \leq x < 1$ eller $x \geq a + 1$.

Svar: Följande fall gäller:

$$\begin{array}{ll} \text{om } a \leq -1, & a+1 \leq x \leq 0,\ x > 1, \\ \text{om } -1 < a < 0, & 0 \leq x \leq a+1,\ x > 1, \\ \text{om } a = 0, & x \geq 0 \text{ med } x \neq 1, \\ \text{om } a > 0, & 0 \leq x < 1,\ x \geq a+1. \end{array}$$