Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2016-09-05 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{42} 3^{2k-2}$. (1 p)

   (b) Bestäm $\left|\dfrac{(1+2i)\overline{(2+i)}}{3+i}\right|$. (1 p)

   (c) Förenkla uttrycket $2x^{1/2}\left(x - x^{-1}\right)^{-1} - \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)^{-1} + \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)^{-1}$ så långt som möjligt. (1 p)

2. Lös ekvationen $x\sqrt{5} + 2\sqrt{x-1} = \sqrt{5}$.

3. Faktorisera $p(x) = 4 + 8x - 15x^2 - 9x^3$ så långt som möjligt i reella faktorer.

4. För vilka komplexa z är $z^2 + 4z = 3i$?

5. Låt $a, b \in \mathbf{R}$ och antag att nollställena till $p(z) = z^3 + az^2 + bz$ bildar en triangel i det komplexa talplanet. Uttryck denna triangels area i a och b.

Lösningsförslag TATM79 2016-09-05 08–11

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = 9$. Första term är $\frac{1}{9}$ och antalet termer är 43. Alltså,
$$\sum_{k=0}^{42} 3^{2k-2} = 3^{-2} \sum_{k=0}^{42} 9^k = \frac{1}{9} \cdot \frac{9^{43}-1}{9-1} = \frac{1}{72}\big(9^{43}-1\big).$$

   (b) Vi förenklar direkt genom
$$\left|\frac{(1+2i)\overline{(2+i)}}{3+i}\right| = \frac{|1+2i||\overline{2+i}|}{|3+i|} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

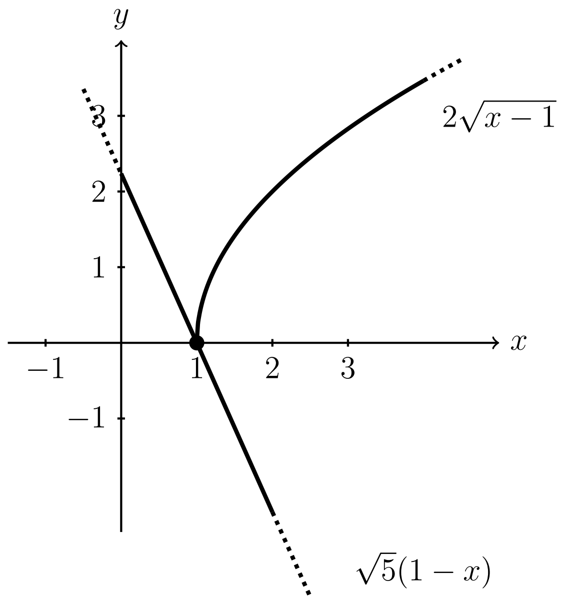
   (c) Uttrycket är definierat för $x > 0$ med $x \neq 1$. För dessa x, låt
$$f(x) = 2x^{1/2}(x - x^{-1})^{-1} - (x^{1/2} + x^{-1/2})^{-1} + (x^{1/2} - x^{-1/2})^{-1}.$$
Vi börjar med att göra de två sista termerna liknämninga (genom att förlänga med respektive konjugat) och kan sedan föra upp allt på samma bråk eftersom nämnarna blir likadana:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^{1/2}}{x - x^{-1}} + \frac{-(x^{1/2} - x^{-1/2}) + x^{1/2} + x^{-1/2}}{x - x^{-1}} \\ &= \frac{2x^{1/2}}{x - x^{-1}} + \frac{2x^{-1/2}}{x - x^{-1}} = \frac{2x^{1/2} + 2x^{-1/2}}{x - x^{-1}} \\ &= \frac{2x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+1}{x^{1/2}} = \frac{2x^{1/2}}{x-1}. \end{aligned}$$

Svar: (a) $\frac{1}{72}\big(9^{43}-1\big)$ (b) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (c) $\frac{2x^{1/2}}{x-1}$.

2. Vi kvadrerar ekvationen (observera att det då bara blir en implikation!):
$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} + x\sqrt{5} = \sqrt{5} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x-1} = \sqrt{5}(1-x) \qquad (*) \\ &\Rightarrow \quad 4(x-1) = 5(1-x)^2 = 5 - 10x + 5x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 - 14x + 5x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{9}{5} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{5} \pm \frac{2}{5}. \end{aligned}$$
Eftersom vi har en implikation **måste** svaren testas. Om $x = 5/5 = 1$ ser vi att
$$\mathrm{VL} = 2\sqrt{1-1} + 1\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL} = \sqrt{5}$$
så $x = 1$ är en lösning. Om $x = \frac{9}{5}$ är
$$\mathrm{VL} = 2\sqrt{\frac{9}{5} - 1} + \frac{9}{5}\sqrt{5} = 2\sqrt{\frac{4}{5}} + \frac{9\sqrt{5}}{5} = \frac{13\sqrt{5}}{5} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL} = \sqrt{5}.$$
Eftersom vänsterled och högerled inte stämmer överens så är detta ingen lösning.

Alternativt: För att det ska kunna finnas en lösning till $(*)$ ovan måste $x \geq 1$ och $x \leq 1$ (varför?). Således är $x = 1$ enda möjligheten. Kontrollen ovan visar att $x = 1$ löser ekvationen (kontrollen här är nödvändig).

Svar: $x = 1$.



3. Vi gissar en rot och finner att $p(-2) = 0$. Således är $x + 2$ en faktor så vi utför en polynomdivision och finner att

$$\begin{aligned} p(x) = (x+2)(-9x^2+3x+2) &= -9(x+2)\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\right) \\ &= -9(x+2)\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= -9(x+2)\left(\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -9(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

där vi kvadratkompletterat 2:a-gradsuttrycket och sedan använt konjugatregeln.

Svar: $p(x) = -9(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x+2)(2-3x)(3x+1)$.

4. Vi ska lösa ekvationen $z^2 + 4z = 3i$. Steg ett är kvadratkomplettering:

$$z^2 + 4z = 3i \quad \Leftrightarrow \quad (z+2)^2 = 4 + 3i.$$

Låt $w = z + 2$. Vi löser

$$w^2 = 4 + 3i, \tag{1}$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = 4 \tag{2}$$

och

$$2ab = 3. \tag{3}$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = |4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = 5. \tag{4}$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Om $a = 3/\sqrt{2}$ blir $b = 1/\sqrt{2}$ och om $a = -3/\sqrt{2}$ blir $b = -1/\sqrt{2}$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = \frac{3+i}{\sqrt{2}} \qquad \text{och} \qquad w = -\frac{3+i}{\sqrt{2}}$$

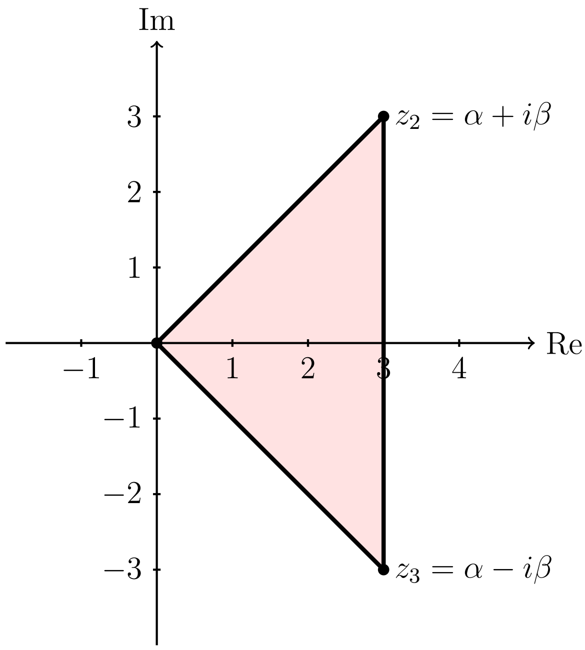
till ekvation (1). Eftersom $z = w - 2$ följer det att

$$z = -2 \pm \frac{3+i}{\sqrt{2}}$$

är lösningarna till ekvationen.

Svar: $z = -2 \pm \dfrac{3+i}{\sqrt{2}}$.

5. Vi ser att $z = 0$ är en rot och att $p(z) = z(z^2 + az + b)$. Om vi ska erhålla en triangel i komplexa talplanet måste övriga två rötter ha en nollskild imaginärdel. Dessutom, eftersom $a, b \in \mathbf{R}$, så kommer dessa två rötter att vara komplexkonjugerade med varandra. Således måste $z = \alpha \pm i\beta$ för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Vi måste kräva att $\alpha \neq 0$ och $\beta > 0$ för att få en triangel. Det reella talet α kan vara negativt, så med det behöver vi vara lite försiktiga. Vi skissar situationen i fallet då $\alpha > 0$ (om $\alpha < 0$ blir det en spegelvänd triangel i vänstra halvplanet).



Triangelns area ges av

$$A = \frac{2\beta \cdot |\alpha|}{2} = \beta|\alpha|.$$

Observera $|\alpha|$ här på grund av att vi inte vet tecknet på α.

Eftersom 2:a-gradspolynomet kan faktoriseras enligt

$$z^2 + az + b = (z - (\alpha + i\beta))(z - (\alpha - i\beta)) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

följer det genom identifikation av koefficienter att $a = -2\alpha$ samt att $b = \alpha^2 + \beta^2$. Alltså måste $\alpha = -a/2$ och $\beta = \sqrt{b - \alpha^2} = \sqrt{b - a^2/4}$. Sålunda blir den eftersökta arean

$$A = \frac{|a|\sqrt{4b - a^2}}{4}.$$

Notera att $b > \dfrac{a^2}{4}$ (en följd från att $\beta > 0$).

Svar: Arean blir $\dfrac{|a|\sqrt{4b - a^2}}{4}$, $b > \dfrac{a^2}{4}$ och $a \neq 0$.