Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2015-09-07 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{31}(-3)^k$. (1 p)

   (b) Bestäm största värdet av $p(x) = 12x - 12 - 4x^2$ med hjälp av kvadratkomplettering. (1 p)

   (c) I en skolklass går 16 elever. 4 av dessa ska utses till klassrepresentanter. På hur många sätt kan detta göras? (1 p)

2. Lös olikheten $\dfrac{3}{3 - x^2 - 2x} > 1$.

3. Lös ekvationen $|x - 5| + x = |2 - x|$.

4. Faktorisera $p(z) = 2z^2 + (3i - 5)z + 4$ så långt som möjligt i komplexa faktorer.

5. Låt linjen L_1 ha ekvationen $3y = 6x + 2$ och låt L_2 vara den normal till L_1 som går genom punkten $(5/6, 4)$. Ange medelpunkt och radie för alla cirklar C som tangerar L_1 i punkten $(1/2, 5/3)$ och som dessutom tangerar L_2.

Lösningsförslag TATM79 2015-09-07 08–11

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = -3$. Alltså,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{31}(-3)^k &= (-3)^3\sum_{k=3}^{31}(-3)^{k-3} = (-3)^3\sum_{j=0}^{28}(-3)^j = -27\cdot\frac{1-(-3)^{29}}{1-(-3)}\\ &= -27\cdot\frac{1+3^{29}}{4} = -\frac{3^{32}+27}{4}.\end{aligned}$$

   (b) Vi kvadratkompletterar och finner att

$$\begin{aligned}p(x) = -4(x^2-3x+3) &= -4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\right)\\ &= -4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) = -3-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

   Det är här tydligt att $p(x) \leq -3$ med likhet endast då $x = \frac{3}{2}$. Största värdet är alltså -3.

   (c) Direkt från definitionen av binomialkoefficienter erhåller vi

$$\binom{16}{4} = \frac{16!}{12!\cdot 4!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2} = 4\cdot 5\cdot 7\cdot 13 = 1820.$$

Svar: (a) $-\dfrac{3^{32}+27}{4}$ (b) -3 (c) 1820.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\begin{aligned}\frac{3}{3-x^2-2x} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 > 1-\frac{3}{3-x^2-2x} = \frac{x^2+2x-3+3}{x^2+2x-3}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x(x+2)}{(x+3)(x-1)} < 0.\end{aligned}$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-3		-2		0		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x+2)}{(x+3)(x-1)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $-3 < x < -2$ eller $0 < x < 1$.

Svar: $-3 < x < -2$ eller $0 < x < 1$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5, \\ 5-x, & x \leq 5 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = 5$ och $x = 2$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq 2$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad 5-x+x = 2-x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3,$$

vilket ligger i rätt intervall ($x \leq 2$). Alltså är $x = -3$ en lösning.

Fall 2: $2 \leq x \leq 5$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad 5-x+x = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = x,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Ingen lösning (i detta fall).

Fall 3: $x \geq 5$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad x-5+x = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning (i detta fall).

Svar: $x = -3$.

4. Vi ska faktorisera polynomet $p(z) = 2z^2 + (3i-5)z + 4$. Steg ett är kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} p(z) &= 2\left(z^2 + \frac{3i-5}{2}z + 2\right) = 2\left(\left(z + \frac{3i-5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3i-5}{4}\right)^2 + 2\right) \\ &= 2\left(\left(z + \frac{3i-5}{4}\right)^2 + \frac{8+15i}{8}\right). \end{aligned}$$

Vi löser ekvationen nu $p(z) = 0$ för att hitta rötterna vilket krävs för att faktorisera $p(z)$. Låt $w = z + \dfrac{3i-5}{4}$. Vi löser

$$w^2 = -\frac{8+15i}{8}, \tag{1}$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -\frac{8+15i}{8}.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = -1 \tag{2}$$

och

$$2ab = -\frac{15}{8}. \tag{3}$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = \left|-\frac{8+15i}{8}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+225}{64}} = \frac{17}{8}$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = \frac{17}{8}. \tag{4}$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = -1 + \frac{17}{8} = \frac{9}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{3}{4}.$$

Om $a = 3/4$ blir $b = -\dfrac{15}{16a} = -\dfrac{5}{4}$ och om $a = -3/4$ blir $b = \dfrac{5}{4}$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = \frac{3}{4} - \frac{5i}{4} \qquad \text{och} \qquad w = -\frac{3}{4} + \frac{5i}{4}$$

till ekvation (1). Eftersom $z = w - \dfrac{3i-5}{4}$ följer det att $p(z) = 0$ inträffar precis då

$$z = \frac{3}{4} - \frac{5i}{4} - \frac{3i-5}{4} = 2 - 2i$$

och

$$z = -\frac{3}{4} + \frac{5i}{4} - \frac{3i-5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Således blir faktoriseringen

$$p(z) = 2(z - 2 + 2i)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = (z - 2 + 2i)(2z - 1 - i).$$

Observera 2:an!

Svar: $p(z) = (z - 2 + 2i)\,(2z - 1 - i)$.

5. Alla normaler till linjen L_1, där L_1 beskrivs av sambandet $y = 2x + \dfrac{2}{3}$, har ekvationer på formen $y = -\dfrac{1}{2}x + m$. Vi söker normalen L_2 som går genom punkten $\left(\dfrac{5}{6},\ 4\right)$, vilket innebär att

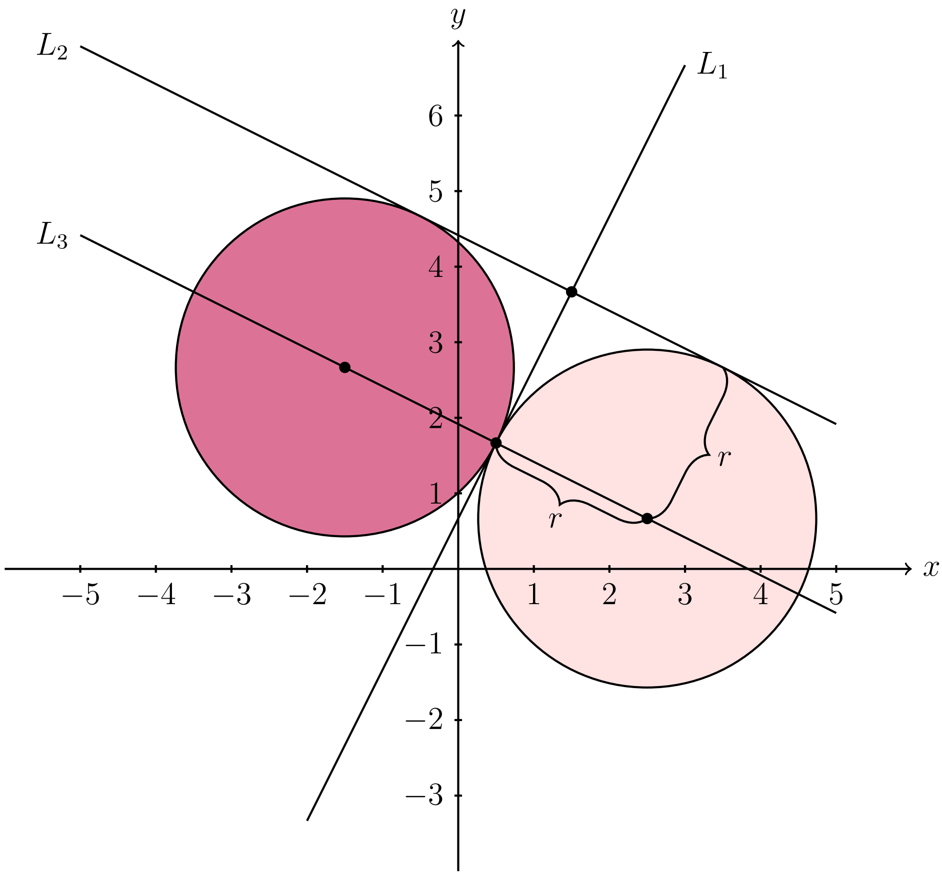
$$m = y + \frac{x}{2} = 4 + \frac{5}{12} = \frac{53}{12}.$$

Normalen skär linjen när

$$2x + \frac{2}{3} = \frac{-x}{2} + \frac{53}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}x = \frac{45}{12} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2},$$

så skärningspunkten är $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{3}\right)$.

Cirklarna vi söker ska tangera L_1 i $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3}\right)$ samt även tangera normalen L_2. Det borde finnas två sådana cirklar och på grund av symmetrin och tangeringspunkterna måste dessa cirklar ha samma radie som ges av avståndet mellan skärningspunkten mellan L_1 och L_2 samt den givna tangeringspunkten på L_1. Vi ritar en skiss:



Figur 1: Skiss över hur situationen ser ut.

Radien kan vi räkna ut enligt

$$r^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\right)^2 = 1 + 2^2 = 5$$

enligt avståndsformeln mellan två punkter i planet. Alla cirklar måste alltså ha radien $\sqrt{5}$. Låt nu L_3 vara linjen parallell med L_2 som går genom $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$. Linjen L_3 har alltså ekvationen $y = -\frac{1}{2}x + m$, där

$$m = y + \frac{x}{2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{4} = \frac{23}{12}.$$

De sökta mittpunkterna (a, b) för cirklarna måste ligga på linjen L_3, vilket innebär att

$$b = -\frac{a}{2} + \frac{23}{12}.$$

Avståndet mellan $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ och (a, b) är också $\sqrt{5}$, så

$$\begin{aligned} 5 &= \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - b\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - a = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{3}{2} \text{ eller } a = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Om $a = -\frac{3}{2}$ blir $b = \frac{3}{4} + \frac{23}{12} = \frac{8}{3}$ och om $a = \frac{5}{2}$ blir $b = -\frac{5}{4} + \frac{23}{12} = \frac{2}{3}$.

Svar: Det finns två cirklar med centrum i $\left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)$ respektive $\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Båda har radie $\sqrt{5}$.