Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2014-09-20 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Ange medelpunkt och radie för cirkeln $x^2 + 3x = 1 + y - y^2$. (1 p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=3}^{146}(2 + 4k)$. (1 p)

   (c) Utveckla $(3a - b)^5$. Ej uträknade binomialkoefficienter får inte förekomma i svaret. (1 p)

2. Lös ekvationen $x - \sqrt{21 - 4x} = 6$

3. Lös olikheten $\dfrac{3}{x} \geq \dfrac{4x - 1}{x + 1}$.

4. Låt $p(z) = 4z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 16z - 8$. Visa att $p(2i) = 0$ och faktorisera sedan $p(z)$ så långt som möjligt i komplexa respektive reella faktorer.

5. Bestäm resten vid divisionen $\dfrac{3x^{100} - 3x^{50} + 2x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 2}$.

Dugga 1 i TATM79, 2014-09-20, lösningsförslag

1. (a) $x^2+3x=1+y-y^2 \iff x^2+3x+y^2-y=1 \iff$

$$\iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$$ vilket är

ekvationen för en cirkel med medelpunkt $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ och radie $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Svar: Medelpunkt $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, radie $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

(b) $\sum_{k=3}^{146}(2+4k)$ är en aritmetisk summa med 1:a term $=2+4\cdot 3$, sista term $=2+4\cdot 146$ och med antalet termer $=146-3+1=144$. Således är

$$\sum_{k=3}^{146}(2+4k)=144\cdot\frac{(2+4\cdot 3)+(2+4\cdot 146)}{2}=144\cdot\frac{4\cdot 150}{2}=43\,200.$$

Svar: $43\,200$.

(c) $(3a-b)^5 = \Big/\text{binomialsatsen}\Big/ = \binom{5}{0}\cdot(3a)^5+\binom{5}{1}\cdot(3a)^4\cdot(-b)+\binom{5}{2}\cdot(3a)^3\cdot(-b)^2+$

$+\binom{5}{3}\cdot(3a)^2\cdot(-b)^3+\binom{5}{4}\cdot(3a)\cdot(-b)^4+\binom{5}{5}\cdot(-b)^5=$

$= \Big/\text{binomialkoefficienter fås t. ex. ur Pascals triangel}\Big/ =$

$=1\cdot 243\cdot a^5-5\cdot 81\cdot a^4b+10\cdot 27\cdot a^3b^2-10\cdot 9\cdot a^2b^3+5\cdot 3\cdot ab^4-1\cdot b^5=$

$=243a^5-405a^4b+270a^3b^2-90a^2b^3+15ab^4-b^5.$

Svar: $243a^5-405a^4b+270a^3b^2-90a^2b^3+15ab^4-b^5$.

2. $x-\sqrt{21-4x}=6 \iff x-6=\sqrt{21-4x} \implies (x-6)^2=21-4x \iff$

$$\iff x^2-8x+15=0 \iff (x-4)^2=1 \iff x=4\pm 1 \iff \begin{cases} x=5 \\ \text{eller} \\ x=3. \end{cases}$$

Eftersom vi inte har ekvivalens i räkningarna **MÅSTE** vi kontrollera.

- $x=5$ ger $x-\sqrt{21-4x}=5-\sqrt{1}=5-1=4\neq 6$ så $x=5$ är inte **inte** en lösning.
- $x=3$ ger $x-\sqrt{21-4x}=3-\sqrt{9}=3-3=0\neq 6$ så $x=3$ är inte **inte** en lösning.

Således saknar ekvationen lösningar.
Alt: $\sqrt{21-4x}$ *är definierat endast då* $21-4x\geq 0$ *dvs då* $x\leq 21/4$. *Men då följer att* $V.L.=x-\sqrt{21-4x}\leq\frac{21}{4}-0<6=H.L.$ *så ekvationen saknar lösningar.*

Svar: Ekvationen saknar lösningar.

3. $\frac{3}{x}\geq\frac{4x-1}{x+1} \iff \frac{4x-1}{x+1}-\frac{3}{x}\leq 0 \iff \frac{(4x-1)x-3(x+1)}{x(x+1)}\leq 0 \iff$

$\iff \frac{4x^2-4x-3}{x(x+1)}\leq 0 \iff \frac{x^2-x-\frac{3}{4}}{x(x+1)}\leq 0 \iff \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1}{x(x+1)}\leq 0 \iff$

$\iff \frac{\left(x-\frac{1}{2}-1\right)\left(x-\frac{1}{2}+1\right)}{x(x+1)}\leq 0 \iff \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x+1)}\leq 0.$

Teckentabellen

x		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$	
$x-\frac{3}{2}$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\frac{1}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

visar att olikheten gäller då $-1 < x \leq -\dfrac{1}{2}$ eller $0 < x \leq \dfrac{3}{2}$.

Svar: Olikheten gäller då $-1 < x \leq -\dfrac{1}{2}$ eller $0 < x \leq \dfrac{3}{2}$.

4. $p(2i) = 4 * (2i)^4 + 4 \cdot (2i)^3 + 14 \cdot (2i)^2 + 16 \cdot 2i - 8 = 64 - 32i - 56 + 32i - 8 = 0$. Eftersom $z = 2i$ är ett nollställe till p och polynomet har reella koefficienter så är även $\bar{z} = -2i$ ett nollställe till p. Därmed innehåller $p(z)$ faktorerna $(z - 2i)$ och $(z + 2i)$, så $p(z)$ är delbart med $(z-2i)(z+2i) = z^2+4$. Polynomdivision visar att $\dfrac{p(z)}{z^2+4} = 4z^2+4z-2 =$
$= 4\left(z^2 + z - \dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\left((z+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\right) = 4\left(z + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= (2z + 1 + \sqrt{3})(2z + 1 - \sqrt{3})$, dvs $p(z) = (z - 2i)(z + 2i)(2z + 1 - \sqrt{3})(2z + 1 + \sqrt{3})$, vilket är den komplexa faktoriseringen. Den reella faktoriseringen har vi redan fått i räkningarna ovan, $p(z) = \left(z^2 + 4\right)(2z + 1 - \sqrt{3})(2z + 1 + \sqrt{3})$.

Svar: $p(z) = \left(z^2+4\right)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3}) =$
$= (z-2i)(z+2i)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3})$.

5. Låt $P(x) = 3x^{100} - 3x^{50} + 2x^2 - 4x + 1$. Vid division med $x^2 + x - 2$ fås kvoten $Q(x)$ och resten $R(x) = Ax + B$ (resten har lägre gradtal än nämnaren), med sambandet

$$P(x) = (x^2 + x - 2) \cdot Q(x) + R(x) = (x^2 + x - 2) \cdot Q(x) + (Ax + B).$$

För att bestämma A och B sätter vi in de x-värden som ger $x^2+x-2 = 0$, dvs $x = 1$ och $x = -2$ i sambandet ovan (för dessa x behöver vi inte veta vad $Q(x)$ är, eftersom det multipliceras med 0). Vi får då sambanden

$$\begin{cases} P(1) = A + B \\ P(-2) = -2A + B \end{cases} \iff \Big/ \text{lös systemet} \Big/ \iff \begin{cases} A = \dfrac{P(1) - P(-2)}{3} \\ B = \dfrac{2P(1) + P(-2)}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \Big/ P(1) = -1,\ P(-2) = 3 \cdot 2^{100} - 3 \cdot 2^{50} + 17 \Big/ \iff \begin{cases} A = 2^{50} - 2^{100} - 6 \\ B = 2^{100} - 2^{50} + 5 \end{cases} \text{dvs}$$

$R(x) = \left(2^{50} - 2^{100} - 6\right)x + 2^{100} - 2^{50} + 5$.

Svar: Resten är $\left(2^{50} - 2^{100} - 6\right)x + 2^{100} - 2^{50} + 5$.