Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATM79
Provkod: TEN5

Dugga 1 i Matematisk grundkurs

2014-09-08 kl 8.00–11.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Kom ihåg att skriva program och grupp på omslaget.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7p. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Bestäm minsta värdet av $f(t) = 25t^2 - 20t + 15$. (1 p)

   (b) Beräkna $3 - 3^{-1} + 3^{-3} - \ldots + 3^{-19}$. (1 p)

   (c) Använd polynomdivision till att skriva om $f(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 7x + 13}{x^2 + 2}$ på en form där man tydligt kan avläsa polynomdivisionens kvot och rest. (1 p)

2. Finn alla reella lösningar till ekvationen $|1 - 2x| - |x - 2| = 1$

3. Lös olikheten $\dfrac{x+5}{2+x} \geq \dfrac{x+1}{2-x}$.

4. Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^2 + 2iz + 14 + 8i = 0$.

5. Finn alla punkter i komplexa planet som ligger dubbelt så långt från 2 som från i. Ge också en geometrisk tolkning av ditt svar.

Dugga 1 i TATM79, 2014-09-08, lösningsförslag

1. (a) $f(t) = 25t^2 - 20t + 15 = 25\left(t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{3}{5}\right) = 25\left(\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\right) =$

$= 25\left(\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}\right) = 11 + 25\left(t - \frac{2}{5}\right)^2$ visar att $f(t) \geq 11$ för alla t.

Dessutom är $f\left(\frac{2}{5}\right) = 11$, vilket visar att minsta värdet av $f(t)$ är 11.

Svar: $f_{\min} = 11$.

(b) $3 - 3^{-1} + 3^{-3} - \cdots + 3^{-19} = \Big/$ geometrisk summa med kvot$= -3^{-2} = -\frac{1}{9}\Big/ =$

$= \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^k$, där n ska uppfylla

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n = 3^{-19} \iff (-1)^n \cdot 3^{1-2n} = 3^{-19} \iff \begin{cases} 1 - 2n = -19 \\ n \text{ jämn} \end{cases} \iff n = 10$$

så vi har en geometrisk summa med kvot$= -\frac{1}{9}$, första term$= 3$ och antal termer$=$ 11 dvs vi får $\sum_{k=0}^{10} 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^k = 3 \cdot \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{11}}{1 + \frac{1}{9}} = \dfrac{27}{10} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{9}\right)^{11}\right)$.

Svar: $\dfrac{27}{10} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{9}\right)^{11}\right)$.

(c) Kalkyl med liggande stolen ger

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 4x^2 & - & 3x & - & 1 & & & & & & \\
\hline
 & 4x^4 & - & 3x^3 & + & 7x^2 & - & 7x & + & 13 & & x^2+2 \\
\cline{12-12}
- & (4x^4 & & & + & 8x^2) & & & & & & \\
\cline{1-10}
 & & & -3x^3 & - & x^2 & - & 7x & + & 13 & & \\
 & & - & (-3x^3 & & & - & 6x) & & & & \\
\cline{3-10}
 & & & & & -x^2 & - & x & + & 13 & & \\
 & & & & - & (-x^2 & & & - & 2) & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & -x & + & 15 & &
\end{array}$$

dvs kvoten är $4x^2 - 3x - 1$ och resten är $-x + 15$, så

$$\frac{4x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 7x + 13}{x^2 + 2} = 4x^2 - 3x - 1 + \frac{-x + 15}{x^2 + 2}.$$

Svar: $4x^2 - 3x - 1 + \dfrac{15 - x}{x^2 + 2}$

2. Falluppdelning: $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x \text{ då } x \leq 1/2 \\ 2x - 1 \text{ då } x \geq 1/2 \end{cases}$, $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 \text{ då } x \geq 2 \\ 2 - x \text{ då } x \leq 2. \end{cases}$ Vi får tre fall att studera:

$x \leq 1/2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 1 - 2x - (2 - x) = 1 \iff x = -2$, som uppfyller villkoret $x \leq 1/2$.

$1/2 \leq x \leq 2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 2x - 1 - (2 - x) = 1 \iff x = 4/3$, som uppfyller villkoret $1/2 \leq x \leq 2$.

$x \geq 2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 2x - 1 - (x - 2) = 1 \iff x = 0$, som **inte** uppfyller villkoret $x \geq 2$.

Svar: $x = -2$ eller $x = 4/3$.

3. $\dfrac{x+5}{2+x} \geq \dfrac{x+1}{2-x} \iff \dfrac{x+5}{2+x} - \dfrac{x+1}{2-x} \geq 0 \iff \dfrac{x+5}{2+x} + \dfrac{x+1}{x-2} \geq 0 \iff$
$\iff \dfrac{(x+5)(x-2)+(x+1)(2+x)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \dfrac{2(x^2+3x-4)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff$
$\iff \dfrac{x^2+3x-4}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0.$
Teckentabellen

x		-4		-2		1		2	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $x \leq -4$, $-2 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

Svar: Olikheten gäller då $x \leq -4$, $-2 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

4. $z^2+2iz+14+8i=0 \iff (z+i)^2-(i)^2+14+8i=0 \iff (z+i)^2=-15-8i.$
Sätt $z+i=a+bi$ där a och b är reella så fås att $(a+bi)^2=-15-8i \iff$
$\iff a^2-b^2+2abi=-15-8i$. Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp ger $\begin{cases} (Re): \ a^2-b^2=-15 \\ (Im): \ 2ab=-8. \\ (Abs): \ a^2+b^2=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=\sqrt{289}=17. \end{cases}$

(Re) och (Abs) ger tillsammans att $2a^2=2 \iff a=\pm 1$. Detta insatt i (Im) ger att om a=1 så är $b=-4$ och om $a=-1$ så är $b=4$. Således är $z+i=1-4i$ eller $z+i=-1+4i$, dvs $z=1-5i$ eller $z=-1+3i$.

Svar: $z=1-5i$ eller $z=-1+3i$.

5. Avståndet mellan z och a ges av $|z-a|$, så vi söker de punkter som uppfyller $|z-2|=2|z-i|$. Med $z=x+iy$, där x och y är reella fås

$|z-2|=2|z-i| \iff \Big/ \text{båda led är} \geq 0 \Big/ \iff |z-2|^2=4|z-i|^2 \iff$
$\iff |x-2+iy|^2=4|x+(y-1)i|^2 \iff (x-2)^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right) \iff$
$\iff 3x^2+4x+3y^2-8y=0 \iff x^2+\dfrac{4}{3}x+y^2-\dfrac{8}{3}y=0 \iff$
$\iff \left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{20}{9}=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$. Detta är ekvationen för en cirkel i det komplexa planet, med medelpunkt $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}i$ och radie $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Svar: Cirkeln med medelpunkt $-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}i$ och radie $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.