LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

**Tentamen i Diskret Matematik, TATA82, TEN1, 2017–10–28, kl 8–13.**

**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.**

För betyg 3 behövs 9 poäng, för betyg 4 12 poäng och 16 poäng för betyg 5.

---

1. Visa att $\sum_{k=1}^{n} (k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$ för alla $n \geq 1$.

2. (a) En enkel, sammanhängande, planär graf har 10 noder; några av dem har gradtal 5 och resterande gradtal 3. Av regionerna har 1 gradtal 5, 1 gradtal 6 och resterande gradtal 3. Beräkna antal noder, kanter och regioner.

   (b) Visa att en graf som ovan inte kan vara bipartit.

3. Betrakta permutationer av bokstäver i DISKRET MATEMATIK

   (a) Visa att relationen definierad som: permutationen $P_1$ relaterad till permutationen $P_2$ om de två E finns p samma platser i båda permutationer är en ekvivalensrelation.

   (b) Beräkna antal permutationer i ekvivalensklassen av EAADIIKKMMRSTTTE.

   (c) Hur många permutationer finns det om det inte finns två på varandra följande T?

4. Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+4} - 6a_{n+3} + 13a_{n+2} - 12a_{n+1} + 4a_n = 8(2)^n + 2 + 4(3)^n$, $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 29, a_3 = 108$.

5. Hur många permutationer av 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 finns det om fem tal är fixerade?

6. (a) Visa eller motbevisa påståendet: Om $m > n$ är två olika primtal så är $m^2 - n^2$ aldrig primtal.

   (b) Låt $a, b$ vara två positiva tal visa att sgd(a, b) = sgd(a-b, a)

   (c) Visa att $1^{2n} + 3^{2n} + 5^{2n} + 7^{2n} + 9^{2n} + 11^{2n} + 13^{2n} + 15^{2n} \equiv 0 mod 8$.

7. Låt $\mathcal{A}$ vara ett totalt ordnat alfabet och betrakta mängden $\mathcal{S}$ av alla ändliga listor av alfabetet. Vi definierar en relation $R$ på $\mathcal{S}$ som följer: listan $a = a_1a_2 \ldots a_m$ är relaterad till listan $b = b_1b_2 \ldots b_n$ (aRb) om något av följande gäller:

   i) $a_1 < b_1$,

   ii) $a_i = b_i$ för $1 \leq i \leq k$ och $a_{k+1} \leq b_{k+1}$, med $k \leq m - 1$,

   iii) $a_i = b_i$ för $1 \leq i \leq m$ och $m < n$

   Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning. R kallas den lexikografiska ordningen.

LINKöPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

**Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 2017–10–28, kl 8–13.**
**Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.**
För betyg N behövs 3N-1 poäng.
**Fullständiga motiveringar krävs.**

1. Visa att $\sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$ för alla $n \geq 1$.

2. (a) En enkel, sammanhängande, planär graf har 10 noder; några av dem har gradtal 5 och resterande gradtal 3. Av regionerna har 1 gradtal 5, 1 gradtal 6 och resterande gradtal 3. Beräkna antal noder, kanter och regioner.
   (b) Visa att en graf som ovan inte kan vara bipartit.

3. Betrakta permutationer av bokstäver i DISKRET MATEMATIK
   (a) Visa att relationen definierad som: permutationen $P_1$ relaterad till permutationen $P_2$ om de två E finns på samma platser i båda permutationer är en ekvivalensrelation.
   (b) Beräkna antal permutationer i ekvivalensklassen av EAADIIKKMMRSTTTE.
   (c) Hur många permutationer finns det om det inte finns två på varandra följande T?

4. Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+4}-6a_{n+3}+13a_{n+2}-12a_{n+1}+4a_n = 8(2)^n+2+4(3)^n$, $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 29, a_3 = 108$.

5. Hur många permutationer av 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 finns det om fem tal är fixerade?

6. (a) Visa eller motbevisa påståendet: Om $m > n$ är två olika primtal så är $m^2 - n^2$ aldrig primtal.
   (b) Låt $a, b$ vara två positiva tal visa att sgd(a, b) = sgd(a-b, a)
   (c) Visa att $1^{2n} + 3^{2n} + 5^{2n} + 7^{2n} + 9^{2n} + 11^{2n} + 13^{2n} + 15^{2n} \equiv 0 mod 8$.

Svar TATA52/TATA82 2017, 28/10

1) Visa att $\sum_{k=1}^{n}(k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$ för alla $n \geq 1$

T. ex med induktion.

1) Först verifierar vi att det är sant för $n=1$

$VL_1 = 1^2(2) = \frac{(1)(2)(3)(4)}{12} = HL_1$ ; $2=2$, stämmer

2) Anta att $\sum_{1}^{n}(k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$ för $n \geq 1$

och vi ska visa att

$$\sum_{1}^{n+1} k^2(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)}{12} \quad (\text{för } n+1)$$

$$VL_{n+1} = \sum_{1}^{n+1} k^2(k+1) = \sum_{1}^{n} k^2(k+1) + (n+1)^2(n+2) \underset{IP}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} + (n+1)^2(n+2) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{12}\Big(n(3n+1) + 12(n+1)\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{12}\left(3n^2+13n+12\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)}{12} = HL_{n+1} \quad \text{VSV}$$

(Obs $3n^2+13n+12 = (n+1)(3n+4)$)

2) (a) Grafen uppfyller : $5x+3y = 2e$, $x+y=10$

$10-e+f=2$ och $5+6+3z=2e$ och $f=1+1+z$

där $e = \#$ kanter, $f = \#$ regioner, $x = \#$ noder med gradtal 5,

$y = \#$ noder med gradtal 3 och $z = \#$ regioner med gradtal 3

$$\begin{cases} 5x+3(10-x) = 2e \\ 11+3z = 2e \\ 10+z = e \end{cases} ; \quad \begin{array}{l} x=4,\ y=6 \\ z=9,\ \underline{f=11},\ e=19, \end{array}$$

(b) En graf planär och bipartit uppfyller att

$e \leq 2v-4$ ; dvs $e \leq 20-4 = 16$, men $e=19$ omöjligt

3a) Relationen $P_1 \sim P_2$ om de två E finns på samma platser är en ekvivalens relation, där $\{P_i\}$ är permutationer av bokstäver i DISKRET MATEMATIK

i) $\sim$ är reflexiv för att för varje permutation $P$, $P \sim P$ eftersom de två E finns på sina platser i $P$

ii) $\sim$ är symmetrisk om $P_1 \sim P_2$ då platser där E finns är desamma för $P_1$ och $P_2$ då $P_2 \sim P_1$ också

iii) $\sim$ är transitive om $P_1 \sim P_2$ och $P_2 \sim P_3$ då är platser där E finns lika för $P_1$, $P_2$ och $P_3$, så $P_1 \sim P_3$

b) i ekvivalensklass av EAADIIKKMMRSTTTE finns E, E på första och sista platser så vi har permutationer av de resterande 14 bokstäver : $\frac{14!}{2!\,2!\,2!\,2!\,3!}$

c) båda följande tolkningar är OK

i) Vi betraktar E och E fixerade har vi $\binom{12}{3}\frac{11!}{2!\,2!\,2!\,2!}$

ii) Om vi betraktar att E också rör på sig : $\binom{14}{3}\frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!}$

5) Det finns $\binom{10}{5} d_5 = \binom{10}{5}\left(\frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!}\right)$
$= \frac{10!}{5!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$ eftersom man välja vilka 5 siffror som är fixerade och de resterande 5 siffror blir helt oordnade (derangemang av 5 siffror)

6a) Är falsk : ta $m=3$ och $n=2$, $3^2-2^2=5$ som är primtal

6b) Alla delare till a och b delar också a och a−b, och vice versa alla delare av a och a−b delar också a och $b = a-(a-b)$.

6c) $1^{2n}+3^{2n}+5^{2n}+7^{2n}+9^{2n}+11^{2n}+13^{2n}+15^{2n} \bmod 8 \equiv 8 \times 1^n \bmod 8 \equiv 0 \bmod 8$

4) Lös $a_{n+4} - 6a_{n+3} + 13a_{n+2} - 12a_{n+1} + 4a_n = 8(2)^n + 2 + 4(3)^n$ $n \geq 0$

i) karakteristisk ekv är $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$

$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 4)$; rötterna

är $r_1 = 1$ dubbelt, $r_2 = 2$ dubbelt

$$a_n^h = (A_1 + A_2 n)(1)^n + (A_3 + A_4 n)(2)^n$$

ii) Partikulärlösning $a_n^p = B_1 n^2 + B_2 n^2 (2)^n + B_3 (3)^n$

där $B_1(n+4)^2 - 6B_1(n+3)^2 + 13B_1(n+2)^2 - 12B_1(n+1)^2 + 4B_1 n^2 = 2$

$$B_1(16 - 54 + 52 - 12) = 2 \; ; \; 2B_1 = 2, \quad \underline{B_1 = 1}$$

och $(2)^n \left[16B_2(n+4)^2 - 48B_2(n+3)^2 + 52B_2(n+2)^2 - 24B_2(n+1)^2 + 4B_2 n^2\right] = 8(2)^n$

$n^2(16B_2 - 48B_2 + 52B_2 - 24B_2 + 4B_2) + n(128B_2 - 288B_2 + 208B_2 - 48B_2) + B_2(256 - 432 - 24 + 208) = 8$

$$8B_2 = 8, \quad \underline{B_2 = 1}$$

och $(3)^n [81B_3 - 162B_3 + 117B_3 - 36B_3 + 4B_3] = 4(3)^n$

$$4B_3 = 4, \quad \underline{B_3 = 1}$$

$$a_n^p = n^2 + n^2(2)^n + (3)^n$$

$$a_n = A_1 + A_2 n + (A_3 + A_4 n)(2)^n + n^2 + n^2(2)^n + (3)^n$$

iii) Begynnelsevillkor

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_3 + 1 \\ 6 = A_1 + A_2 + 2A_3 + 2A_4 + 1 + 2 + 3 \\ 29 = A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 8A_4 + 4 + 16 + 9 \\ 108 = A_1 + 3A_2 + 8A_3 + 24A_4 + 9 + 72 + 27 \end{cases} ; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 24 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} A_1 = A_2 = \\ = A_3 = A_4 = 0 \end{array}$$

$$a_n = n^2 + n^2(2)^n + (3)^n$$

Uppgift 7 är endast för TATA82

Låt $\mathcal{U}$ vara ett totalt ordnat alfabet och betrakta mängden $S$ av alla ändliga listor av alfabetet. Definiera $R$ på $S$ som följer listan $a = a_1 a_2 \dots a_m$ relaterat till $b = b_1 b_2 \dots b_n$ ($aRb$) om något av följande gäller

i) $a_1 < b_1$

ii) $a_i = b_i$ $1 \le i \le k$ $a_{k+1} \le b_{k+1}$ $k \le m-1$

iii) $a_i = b_i$ $1 \le i \le m$ , $m < n$

* Först; $R$ är reflexiv för att för ~~varje~~ lista $a$
  $aRa$ eftersom $a_i = a_i$ $1 \le i \le k$, $a_m = a_m$, $k = m-1$ (andra villkoret)
* $R$ är antisymmetrisk: anta att $aRb$ och $bRa$ då måste vara $m = n$ och $a_1 = b_1$, dessutom $\forall k, k \le m-1$ $a_i = b_i$ $1 \le i \le k$ $a_{k+1} \le b_{k+1}$ så vi får $a_i = b_i$ för $1 \le i \le m-1$ och $a_m \le b_m$ och $b_m \le a_m$ så $a = b$

* $R$ är transitiv: anta att $aRb$ och $bRc$. Vi har 9 fall att studera $a = a_1 \dots a_m$, $b = b_1 \dots b_n$, $c = c_1 \dots c_r$

i) Om $a_1 < b_1$ och $b_1 < c_1$ ; $a_1 < c_1$ och $aRc$

ii) iii) Om $a_1 < b_1$ och $bRc$ enligt villkor ii) eller iii) $a_1 < c_1$ och $aRc$

iv) Om $a_i = b_i$ $1 \le i \le k$, $a_{k+1} \le b_{k+1}$ $k \le m-1$ och $b_1 < c_1$ då $a_1 < c_1$ dvs $aRc$

Om $b_i = c_i$ $1 \le i \le n$ och $n < r$ också $m < r$ och $aRc$

Om $b_i = c_i$ $1 \le i \le j$ $b_{j+1} \le c_{j+1}$ $j \le m-1$ för $\min\{k, j\} = h$ $a_i = c_i$ , $1 \le i \le h$ och $a_{h+1} \le c_{h+1}$ så $aRc$

slutligen om antal symboler i $b$ är större än i $a$ i fallet de ~~som~~ först symboler i $c$ är lika med $a$ har $c$ fler symboler så $aRc$