Written Examination in Discrete Mathematics TATA82, TEN1, 2017–06–01, kl 14–19.
No calculator.
For grade 3 are required 9 points, 12 points for grade 4 and 16 for grade 5.
Complete motivations required.

1. Show with mathematical induction that $1+4+\ldots+(n-1)^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, for every $n \geq 2$.

2. Consider the graph below

   a) Show that the graph is planar and provide a planar representation.

   b) Show that the graph is not bipartite but its chromatic number is 3.

   c) Show that the graph is Hamiltonian.

3. a) A venue has capacity for 2000 people. To a show come t spectators. Determine the number t of spectators if one knows that there were at least 1000 paying spectators. One knows also that when grouping the public in groups of 7, 3 people remain; 5 people remain when grouping in groups of 11, and finally 7 people remain when grouping in groups of 15. (2p)

   b) Determine the last three (3) digits of $(1987321)^{18406}$. (1p)

4. My favorite hamburger-restaurant makes hamburger-sandwiches with two kinds of bread: integral and graham, and three kinds of "burger": beef, chicken or vegetarian. There are also 6 other, **selectable** ingredients: lettuce onion, cucumber, tomato, cheese and dressing. How many kinds of sandwiches can be made if a sandwich contains always 1 fillet of burger and 2 slices of bread of the same kind at the bottom and top of the sandwich. A sandwich can contain between 0 and 6 of the selectable ingredients, and two sandwiches with the same ingredients in different order are considered to be of different kind.

5. Solve the recurrence equation $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 16(2)^n + 2(3)^n$, $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 41$.

6. A code has an alphanumeric alphabet with 16 ordered symbols (in this order): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, A, B, C, D, E, F. How many code words of length 16 containing all the symbols are there satisfying the following three conditions? The answer shall be given as an integer.

   a) X takes always place no. 10

   b) The remaining alphabetical symbols take places 11 to 16 but they do not take their original place.

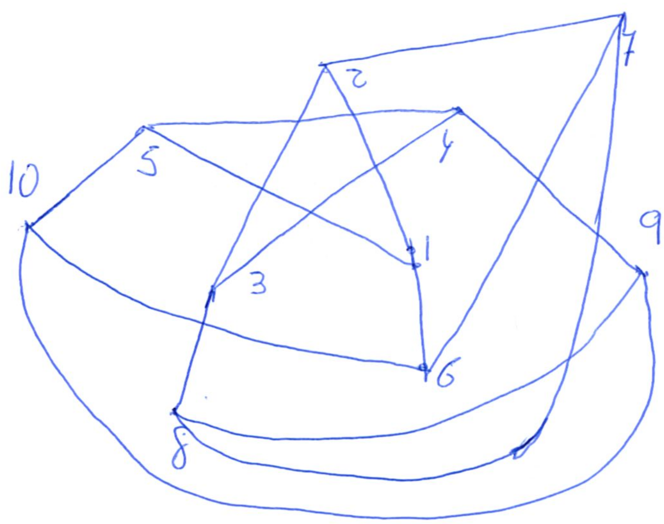
   c) The numerical symbols take places 1 till 9 in such a way that odd digits take odd-numbered places, even digits take even-numbered places and no digit takes its original place.

7. Consider $A = \{a \in \mathbb{N}; a \geq 2\}$. We define a relation $\mathcal{R}$ on A as $a\mathcal{R}b$ if $a-1$ divides $b-1$.

   a) Show that $\mathcal{R}$ is a partial ordering.

   b) Show that $(A, \mathcal{R})$ is a lattice.

   c) Show that $(A, \mathcal{R})$ has a minimum and determine it.



Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA82, TEN1, 2017–06–01, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 9 poäng, för betyg 4 12 poäng och 16 poäng för betyg 5.

1. Visa med induktionsprincipen att $1 + 4 + \ldots + (n-1)^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, för alla $n \geq 2$.

2. Betrakta grafen nedan

   a) Visa att grafen är planär och ge en planär representation av grafen.

   b) Visa att grafen inte är bipartit, men har kromatiskt tal 3.

   c) Visa att grafen är hamiltonsk.

3. a) Man vet att en lokal rymmer 2000 personer. Till en föreställning kommer t åskådare. Bestäm antalet t om man vet att det var minst 1000 betalande åskådare. Man vet vidare att om man grupperar åskådarna i grupper av 7 blir 3 personer kvar; det blir 5 personer kvar vid gruppering i 11-grupper och det blir 7 personer kvar vid gruppering i 15-grupper. (2p)

   b) Bestäm de tre sista siffrorna i $(1987321)^{18406}$. (1p)

4. Min favorit hamburger-restaurang gör hamburger-mackor med 2 sorters bröd: fullkorn och graham, och tre sorters "burgare": nötkött, kyckling eller vegetarisk. Det finns också 6 andra, **valbara** ingredienser: sallad, gurka, lök, tomat, ost och dressing. Hur många sorters mackor kan man göra om en macka altid innehåller 1 (en) styck burgare och 2 skivor bröd av samma typ som kommer på botten och toppen. En macka kan innehålla mellan 0 och 6 av de valbara ingredienserna och man anser att två mackor med samma ingredienser i olika ordningar är av två olika sort.

5. Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 16(2)^n + 2(3)^n$, $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 41$.

6. En kod har ett alfanumeriskt alfabet med 16 ordnade symboler (i denna ordning): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, A, B, C, D, E, F. Hur många kodord av längd 16 innehållande alla symbolerna finns det som uppfyller följande tre villkor? Svaret ska anges som ett heltal.

   a) X står på plats nr. 10

   b) De resterande alfabetiska symbolerna står på platserna 11-16 men aldrig på sina ursprungliga positioner.

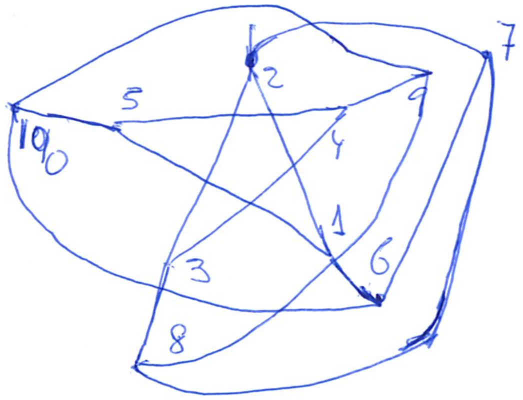
   c) De numeriska symbolerna står på platserna 1 till 9 på så sätt att udda siffror står på udda positioner, jämna siffror fstår på jämna positioner och ingen siffra står på sin ursprungliga position.

7. Betrakta $A = \{a \in \mathbb{N}; a \geq 2\}$. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på A genom $a\mathcal{R}b$ om $a-1$ är en delar $b-1$.

   a) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning.

   b) Visa att $(A, \mathcal{R})$ är en lattice.

   c) Visa att $(A, \mathcal{R})$ har ett minsta element och bestäm det.



Answers to Discrete Mathematics TATA82/TATA52

1/6 2018

1) Show that $\sum_{k=2}^{n} (k-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, $\forall n \geq 2$

With Math. Ind we prove i) for $n=2$ $LHS_2 = 1^2 = 1 = \frac{(1)(2)(3)}{6}$ Yes

ii) Assume that $\sum_{k=2}^{p} (k-1)^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$ for some $p \geq 2$

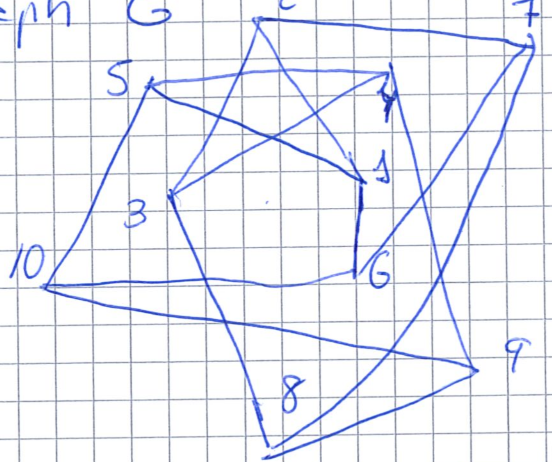
And show that $LHS_{p+1} = \sum_{2}^{p+1} (k-1)^2 = \sum_{2}^{p} (k-1)^2 + p^2 \overset{IH}{=}$

$= \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} + p^2 = p\frac{(p-1)(2p-1)+6p}{6} = \frac{p(2p^2+3p+1)}{6}$

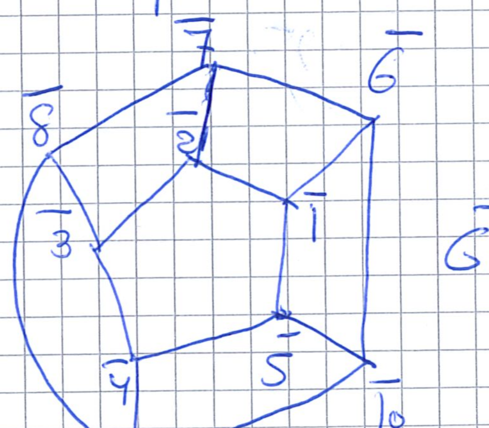
$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} = \frac{(p+1-1)(p+1)(2(p+1)-1)}{6} = RHS_{p+1}$

as required.

2) the graph G



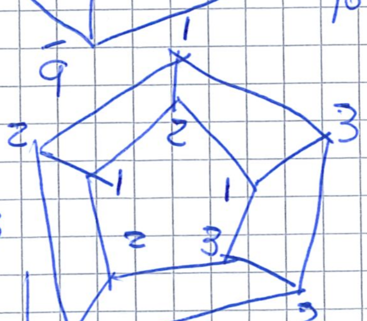
is planar



In fact G is isomorphic to which is planar.

b) G (and $\bar{G}$) contains 5-cycles

So G is not bipartite, but →



is a colouring with 3 colours

c) Finally $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 9 \to 8 \to$

$\to 7 \to 6 \to 10 \to 5 \to 1$

is a Hamiltonian cycle

3a) We look for an integer t, $1000 \le t \le 2000$

s.t $\begin{cases} t \equiv 3 \bmod 7 \\ t \equiv 5 \bmod 11 \\ t \equiv 7 \bmod 15 \end{cases}$ with $(7,11)=(7,15)=(11,15)=1$, $N=1155$

With Chinese Remainder Theorem we know that

$t \equiv (3(165)x_1 + 5(105)x_2 + 7(77)x_3) \bmod 1155$

where $165x_1 \equiv 1 \bmod 7$; $4x_1 \equiv 1 \bmod 7$; $x_1 \equiv 2 \bmod 7$

$105x_2 \equiv 1 \bmod 11$; $6x_2 \equiv 1 \bmod 11$; $x_2 \equiv 2 \bmod 11$

$77x_3 \equiv 1 \bmod 15$; $2x_3 \equiv 1 \bmod 15$; $x_3 \equiv 8 \bmod 15$

$t \equiv 990 + 1050 + 4312 \bmod 1155 \equiv 6352 \bmod 1155$

$t \equiv 1732$ spectators

4: We have 2 choices for the bread, 3 choices for the burger and once we have choosen bread and burger we have 7 cases: choosing between 0 and 6 other ingredients so

$(2)(3)\left[\binom{6}{6}7! + \binom{6}{5}6! + \binom{6}{4}5! + \binom{6}{3}4! + \binom{6}{2}3! + \binom{6}{1}2! + 1\right]$

Remember if we choose k ingredients, then we permute $k+1$ items (the k ingredients choosen, plus the burger)

$6(5040 + 4320 + 1800 + 480 + 90 + 12 + 1) = 6(11743)$

70458 kinds of sandwiches

3b) We look for $0 \le r \le 999$ s.t $(1987321)^{18406} \equiv r \bmod 1000$

As $\phi(1000) = \phi(8)\phi(125) = (4)(100) = 400$ we get that $(1987321)^{18406} \equiv 321^{18406} \equiv 321^{18400} \cdot 321^6 \equiv 321^6 \equiv$

$\equiv (321)^2(321)^4 \equiv (41)(681) \equiv \underline{921} \bmod 1000$

6) We look for derangements of 5; the 5 odd numeric symbols times derangements of 4, the 4 even numeric symbols, times derangements of 6; the derangements of A, B, C, D, E, F

Totally $d_5 d_4 d_6 = (44)(9)(265) = 104940$ code words

5) Solve $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 16(2)^n + 2(3)^n$

$a_0 = 1,\ a_1 = 7;\ a_2 = 41$

First the general homogeneous solution

$a_{n+3}^{(h)} - 5a_{n+2}^{(h)} + 8a_{n+1}^{(h)} - 4a_n^{(h)} = 0;\ r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$

$r_1 = 2,\ m_1 = 2,\ r_2 = 1,\ m_2 = 1$

$$a_n^{(h)} = A_1 + A_2(2)^n + A_3 n(2)^n$$

Particular solution $a_n^{(p)} = Bn^2(2)^n + C(3)^n$

then $8B(n+3)^2 - 20B(n+2)^2 + 16B(n+1)^2 - 4Bn^2 = 16$

$n^2(8B - 20B + 16B - 4B) + n(48B - 80B + 32B) + B(72 - 80 + 16) = 16$

And $\cancel{8}27C - 45C + 24C - 4C = 2;\ \underline{C=1}$ $\underline{B=2}$

$$a_n^{(p)} = 2n^2(2)^n + (3)^n$$

$$a_n = A_1 + A_2(2)^n + A_3 n(2)^n + 2n^2(2)^n + (3)^n$$

$\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 + A_2 + 1 \\ a_1 = 7 = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 4 + 3 \\ a_2 = 41 = A_1 + 4A_2 + 8A_3 + 32 + 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 0 = A_1 + 2A_2 + 2A_3 \\ 0 = A_1 + 4A_2 + 8A_3 \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = 0$

$$a_n = \underline{2n^2(2)^n + (3)^n}$$

Exercise 7 is only for TATA82

Define R on $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 2\}$ as aRb if $(a-1) \mid (b-1)$

a) R is partial ordering since

i) R reflexive; for all $a \in A$; $a-1 \mid a-1$

ii) R antisymmetric if aRb and bRa we have

$a-1 \mid b-1$ and $b-1 \mid a-1$ then $a-1 = b-1$ ie $\underline{a=b}$

iii) R transitive if aRb and bRc we have

$a-1 \mid b-1$ and $b-1 \mid c-1$, then $\underline{a-1 \mid c-1 \text{ ie } aRc}$

b) (A, R) is a lattice since given $\{a, b\}$ consider

$d = \gcd(a-1, b-1)$ and $m = \operatorname{lcm}(a-1, b-1)$ then

$d+1 \ R\ a$, $d+1 \ R\ b$ and $a\ R\ m+1$, $b\ R\ m+1$

c) $a = 2$ is the minimum since $2-1=1$, $1 \mid b-1$ for all $b \geq 2$

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 2018–06–01, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg N behövs 3N-1 poäng.

---

1. Visa med induktionsprincipen att $1+4+\ldots+(n-1)^2 = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, för alla $n \geq 2$.

2. Betrakta grafen nedan

   a) Visa att grafen är planär och ge en planär representation av grafen.

   b) Visa att grafen inte är bipartit, men har kromatiskt tal 3.

   c) Visa att grafen är hamiltonsk.

3. a) Man vet att en lokal rymmer 2000 personer. Till en föreställning kommer t åskådare. Bestäm antalet t om man vet att det var minst 1000 betalande åskådare. Man vet vidare att om man grupperar åskådarna i grupper av 7 blir 3 personer kvar; det blir 5 personer kvar vid gruppering i 11-grupper och det blir 7 personer kvar vid gruppering i 15-grupper. (2p)

   b) Bestäm de tre sista siffrorna i $(1987321)^{18406}$. (1p)

4. Min favorit hamburger-restaurang gör hamburger-mackor med 2 sorters bröd: fullkorn och graham, och tre sorters "burgare": nötkött, kyckling eller vegetarisk. Det finns också 6 andra, **valbara** ingredienser: sallad, gurka, lök, tomat, ost och dressing. Hur många sorters mackor kan man göra om en macka altid innehåller 1 (en) styck burgare och 2 skivor bröd av samma typ som kommer på botten och toppen. En macka kan innehålla mellan 0 och 6 av de valbara ingredienserna och man anser att två mackor med samma ingredienser i olika ordningar är av två olika sort.

5. Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 8a_{n+1} - 4a_n = 16(2)^n + 2(3)^n$, $n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 41$.

6. En kod har ett alfanumeriskt alfabet med 16 ordnade symboler (i denna ordning): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, A, B, C, D, E, F. Hur många kodord av längd 16 innehållande alla symbolerna finns det som uppfyller följande tre villkor? Svaret ska anges som ett heltal.

   a) X står på plats nr. 10

   b) De resterande alfabetiska symbolerna står på platserna 11-16 men aldrig på sina ursprungliga positioner.

   c) De numeriska symbolerna står på platserna 1 till 9 på så sätt att udda siffror står på udda positioner, jämna siffror fstår på jämna positioner och ingen siffra står på sin ursprungliga position.