LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA82, TEN1, 2017–05–30, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg 3 behövs 9 poäng, för betyg 4 12 poäng och 16 poäng för betyg 5.

---

1. Betrakta Fibonaccital som definieras av $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$, $(f_0 = 0)$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Visa att $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, för alla $n \geq 1$.

2. Betrakta den viktade grafen nedan: Är den eulersk? hamiltonsk? bipartit? Ange ett minimalt uppspännande träd och dess kostnad.

3. (a) Hur många ternära följder (man använder symboler 0, 1 och 2) av längd 100 finns det med villkoret att de 10 första siffrorna är 1,1,1,1,0,0,0,2,2,2 ?

   (b) Ett alfabet består av 11 symboler (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X). Hur många kodord av längd 100 finns om positionerna nr 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 och 100 tas av symbolen X?

   (c) Hur många funktioner $f : A = \{1, \dots, 100\} \to B = \{0, 1, 2, 3\}$ finns det med villkoret att alla talen 91 t.o.m. 100 avbildas på siffran 0?

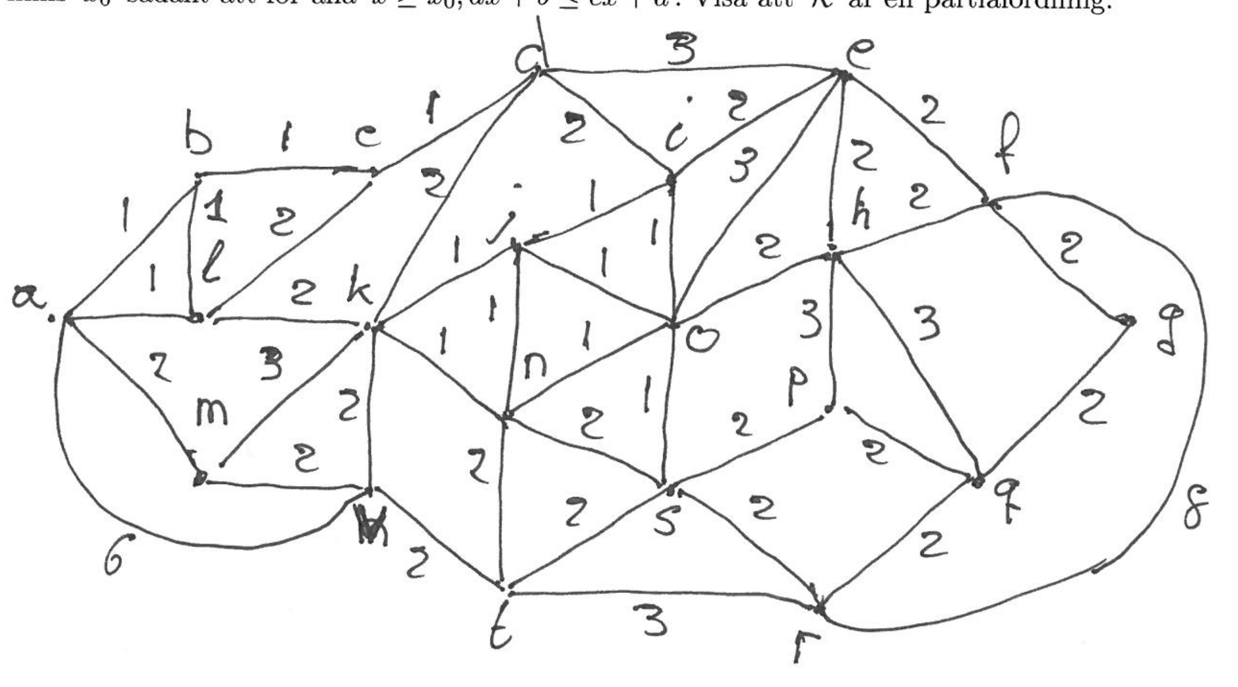
4. (a) Lös ekvationsystemet $\begin{cases} x & +2y & +z & \equiv & 12 & mod(23) \\ 2x & +y & +2z & \equiv & 15 & mod(23) \\ 3x & +8y & +4z & \equiv & 0 & mod(23) \end{cases}$ (2p)

   (b) Min bank tar emot och växlar gamla mynt i påsar av exakt 2 kg. Varje 5-kronors mynt väger 74 g, och varje 10-kronors mynt väger 54 g. Hur många mynt finns i påsen och vilket värde har påsen i kronor? (1p)

5. Lös den rekursiva ekvationen $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 6$, $n \geq 3, a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 15$.

6. Hur många permutationer av symbolerna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och X finns det om något mönster 12, 34, 56, 78, 9X förekommer?

7. Betrakta $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på A genom $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ om det finns x_0 sådant att för alla $x \geq x_0, ax + b \leq cx + d$. Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning.



Written Examination in Discrete Mathematics TATA82, TEN1, 2017–05-30, kl 14–19.
No calculator.
For grade 3 are required 9 points, 12 points for grade 4 and 16 for grade 5.
Complete motivations required.

---

1. Consider Fibonacci numbers defined by $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$, $(f_0 = 0)$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Show that $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, for all $n \geq 1$.

2. Consider the weighted graph below: Is it Eulerian? Hamiltonian? bipartite? Give a minimal spanning tree and its cost.

3. (a) How many ternary sequences (using symbols 0, 1 and 2) of length 100 are there if the 10 first symbols are 1,1,1,1,0,0,0,2,2,2 ?
   (b) An alphabet consists of 11 symbols (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X). How many code words of length 100 are there if the positions no. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 and 100 are taken by the symbol X?
   (c) How many functions $f : A = \{1, \dots, 100\} \to B = \{0, 1, 2, 3\}$ are there if the numbers 91 to 100 are mapped to the digit 0?

4. (a) Solve the system of equations:

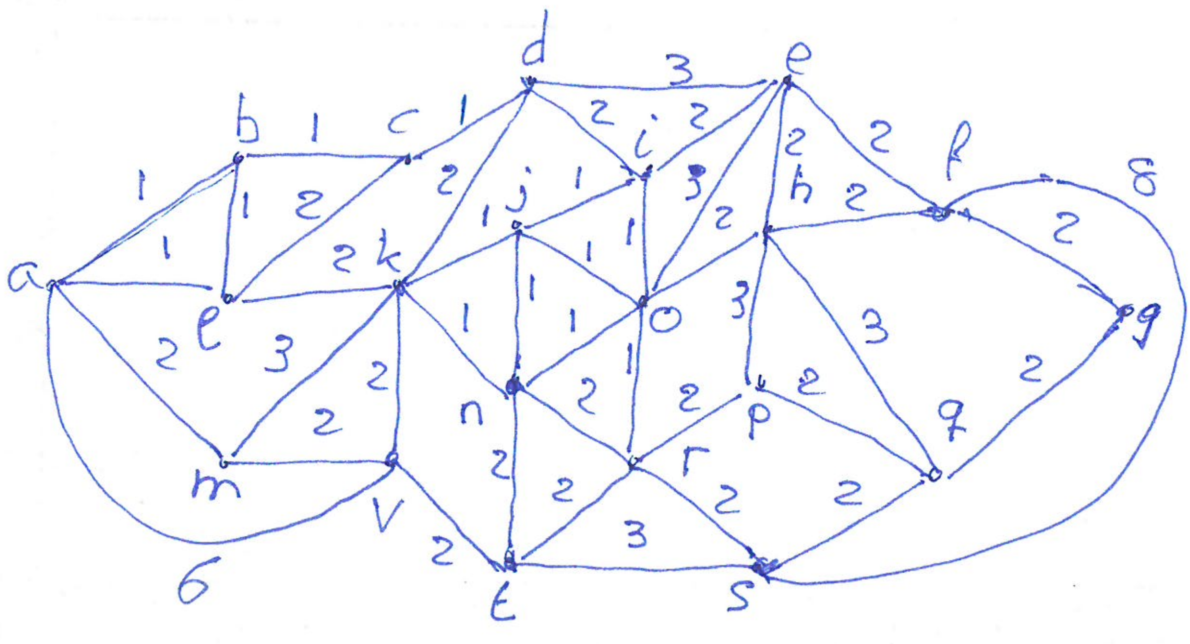
$$\begin{cases} x + 2y + z \equiv 12 \ mod(23) \\ 2x + y + 2z \equiv 15 \ mod(23) \\ 3x + 8y + 4z \equiv 0 \ mod(23) \end{cases} \qquad (2p)$$

   (b) My bank takes in and exchanges old coins in bags of exactly 2 kg. Each 5-crown coin weights 74 g, and each 10-crown coin weights 54 g. How many coins are in a bag and what is the total value of the coins in one bag? (1p)

5. Solve the recursive equation $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 6$, $n \geq 3$, $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 15$.

6. How many permutations of the symbols 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and X are there if it contains at least one of the patterns 12, 34, 56, 78, 9X?

7. Consider $A = \{(a, b) | a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$. We define a relation $\mathcal{R}$ on A by $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ if there is x_0 such that for all $x \geq x_0, ax + b \leq cx + d$. Show that $\mathcal{R}$ is a partial order.



LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 20167-05-30, kl 14–19.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg N behövs 3N-1 poäng.

---

1. Betrakta Fibonaccital som definieras av $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$, $(f_0 = 0)$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Visa att $A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, för alla $n \geq 1$.

2. Betrakta den viktade grafen nedan: Är den eulersk? hamiltonsk? bipartit? Ange ett minimalt uppspännande träd och dess kostnad.

3. (a) Hur många ternära följder (man använder symboler 0, 1 och 2) av längd 100 finns det med villkoret att de 10 första siffrorna är 1,1,1,1,0,0,0,2,2,2 ?

   (b) Ett alfabet består av 11 symboler (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X). Hur många kodord av längd 100 finns om positionerna nr 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 och 100 tas av symbolen X?

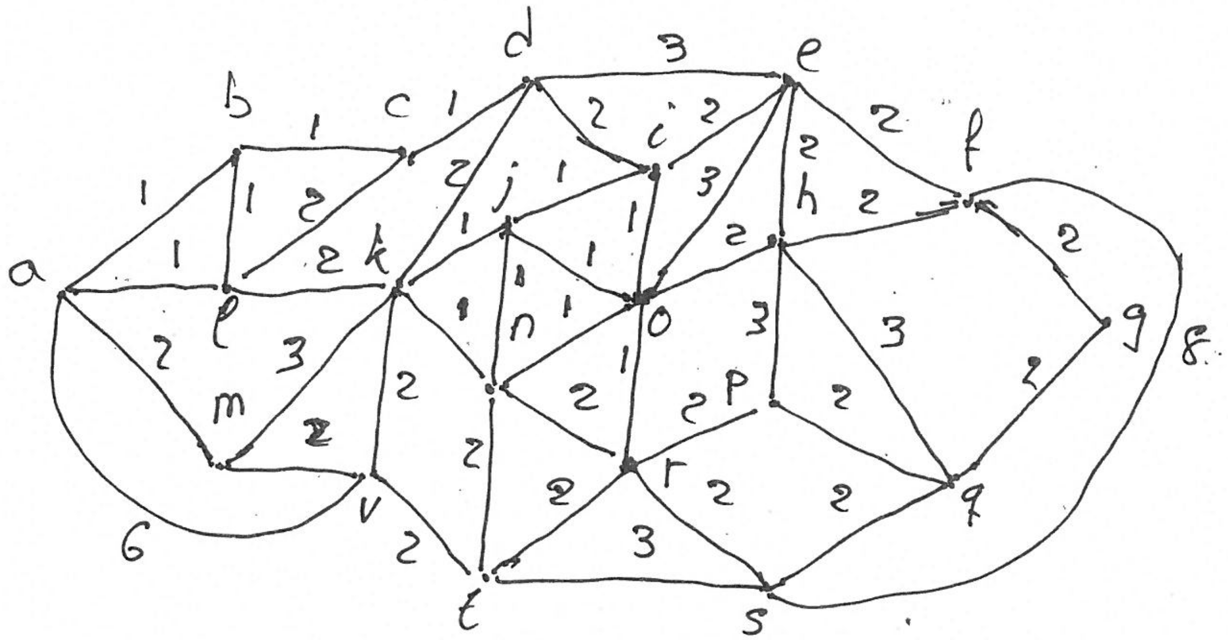
   (c) Hur många funktioner $f : A = \{1, \ldots, 100\} \rightarrow B = \{0, 1, 2, 3\}$ finns det med villkoret att alla talen 91 t.o.m. 100 avbildas på siffran 0?

4. (a) Lös ekvationsystemet $\begin{cases} x + 2y + z \equiv 12 \ mod(23) \\ 2x + y + 2z \equiv 15 \ mod(23) \\ 3x + 8y + 4z \equiv 0 \ mod(23) \end{cases}$ (2p)

   (b) Min bank tar emot och växlar gamla mynt i påsar av exakt 2 kg. Varje 5-kronors mynt väger 74 g, och varje 10-kronors mynt väger 54 g. Hur många mynt finns i påsen och vilket värde har påsen i kronor? (1p)

5. Lös den rekursiva ekvationen $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 6$, $n \geq 3, a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 15$.

6. Hur många permutationer av symbolerna 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och X finns det om något mönster 12, 34, 56, 78, 9X förekommer?



- Answers to Exam TATA82/52 30/5 2017

1) Consider Fibonacci numbers defined by $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$, $f_1 = f_2 = 1$ ($f_0 = 0$). Show that $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ $n \geq 1$

With mathematical induction (IP) we need to show

i) True for $n=1$, where $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$. True

$n=2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}$

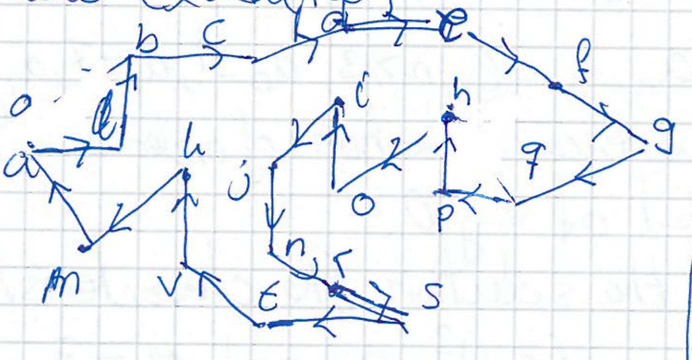
ii) If we assume $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, we must prove that $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$. But

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{IP}{=} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}+f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2}, & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

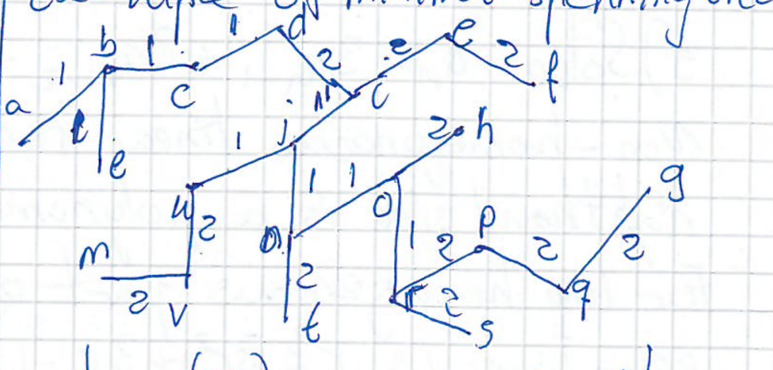
V.S.V.

2) The graph is Non-Eulerian since, e.g. deg(b) = 3, odd.
The graph is not bipartite; it contains triangles

The graph is Hamiltonian, with Hamiltonian cycle
(as example)



Example of minimal spanning tree



Cost $c(T_0) = 9 + 22 = 31$ units.

3a) We have 3 choices for any of the positions 11-100 : 3^{90}

3b) We have 11 choices for 90 positions : 11^{90}

3c) We have 4 choices for every image of numbers 1-90 : 4^{90}

4a) Solve
$$\begin{cases} (1)\; x+2y+z \equiv 12 \mod 23 \\ (2)\; 2x+y+2z \equiv 15 \mod 23 \\ (3)\; 3x+8y+4z \equiv 0 \mod 23 \end{cases} \xLeftrightarrow[(3)-(2)-(1)]{(2)-2(1)} \begin{cases} x+2y+z \equiv 12 \mod 23 \\ -3y \equiv -9 \mod 23 \\ 5y+z \equiv 19 \mod 23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6+z \equiv 12 \mod 23 \\ y \equiv 3 \mod 23 \\ 15+z \equiv 19 \mod 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z \equiv 6 \mod 23 \\ y \equiv 3 \mod 23 \\ z \equiv 4 \mod 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \mod 23 \\ y \equiv 3 \mod 23 \\ z \equiv 4 \mod 23 \end{cases}$$

Kontrol: $2+6+4 \equiv 12$, $4+3+8 \equiv 15$, $6+24+16 \equiv 46 \equiv 0$

4b) We have the Diophantic equation

$$74F + 54T = 2000, \quad F = \#\,5\text{-crown coins}, \quad T = \#\,10\text{-crown coins}$$

$\gcd(74, 54) = 2$, $2 \mid 2000$

$$37F + 27T = 1000 \qquad \gcd(37, 27) = 1, \; 1 \mid 1000$$

Using division algorithm we have

$$1 = (-8)\,37 + (11)\,27 \qquad F_0 = -8, \; T_0 = 11$$

(Control $1 = -296 + 297$) $\quad F^p = -8000, \; T^p = 11000$

$$\begin{cases} F = -8000 + 27n \geq 0 & 27n \geq 8000 & n \geq 297 \\ T = 11000 - 37n \geq 0 & 11000 \geq 37n & n \leq 297 \end{cases}$$

$n = 297 \quad F = -8000 + 8019 = 19, \; T = 11000 - 10989 = 11$

There are 30 coins in the bag for a value of <u>205 SEK</u>

5) Solve $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 6$, $n \geq 3$, $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 15$

Non-homogeneous linear recurrence equation of order 3 where righthand side is a polynomial of deg 0.

For the homogeneous part of the solution the characteristic equation is $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, $(r-1)^3 = 0$, $r = 1$, $m = \underline{3}$

$$a_n^h = A_1 + A_2 n + A_3 n^2$$

The particular solution $a_n^p = Bn^3$ wher B satisfies

$$Bn^3 - 3B(n-1)^3 + 3B(n-2)^3 - B(n-3)^3 = 6$$

$$n^3(B - 3B + 3B - B) + n^2(9B - 18B + 9B) + n(-9B + 36B - 27B)$$
$$+ 3B - 24B + 27B = 6 \quad ; \quad \underline{B = 1}$$

$$a_n = a_n^p + a_n^h = 1n^3 + A_3 n^2 + A_2 n + A_1$$

with initial conditions $\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 \\ a_1 = 7 = 1 + A_3 + A_2 + A_1 \\ a_2 = 15 = 8 + 4A_3 + 2A_2 + A_1 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_3 + A_2 = 5 \\ 2A_3 + A_2 = 3 \end{cases}$ $\quad A_1 = 1, \; A_2 = 7, \; A_3 = -2$

$$\underline{a_n = n^3 - 2n^2 + 7n + 1}$$

6) Consider the sets of permutations of $1, 2, \dots, 9, X$

$A_{12} = \{\text{permut. with pattern } 12\}$ $|A_{12}| = 9!$

$A_{34} = \{\text{permut with pattern } 34\}$ $|A_{34}| = 9!$

$A_{56} = \{\text{permut with pattern } 56\}$ $|A_{56}| = 9!$

$A_{78} = \{\text{permut with pattern } 78\}$ $|A_{78}| = 9!$

$A_{9X} = \{\text{permut with pattern } 9X\}$ $|A_{9X}| = 9!$

We want to know $|A_{12} \cup A_{34} \cup A_{56} \cup A_{78} \cup A_{9X}|$.

By the Principle of Inclusion and Exclusion

$|A_{ij} \cap A_{hk}| = 8!$; $|A_{ij} \cap A_{hk} \cap A_{mn}| = 7!$ (not scalar sort) in the same way

$|A_{ij} \cap A_{hk} \cap A_{mn} \cap A_{pq}| = 6!$

$|A_{12} \cap A_{34} \cap A_{56} \cap A_{78} \cap A_{9X}| = 5!$

In total

$|A_{12} \cup A_{34} \cup A_{56} \cup A_{78} \cup A_{9X}| =$

$= \binom{5}{1} 9! - \binom{5}{2} 8! + \binom{5}{3} 7! - \binom{5}{4} 6! + \binom{5}{5} 5!$

$= 1458000$

7) Exercise 7 is only for TATA82

One defines a relation $\mathcal{R}$ on $A = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$ by $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ if there is a real number x_0 s.t for all $x \geq x_0$ $ax+b \leq cx+d$.

$\mathcal{R}$ is a partial order since

i) $\mathcal{R}$ reflexive: Given (a,b) there exist a number, for instance $x_0 = 0$ s.t for all $x \geq 0$ $ax+b \leq ax+b$

ii) $\mathcal{R}$ transitive: If $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ and $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$ we have x_1 s.t for all $x \geq x_1$ $ax+b \leq cx+d$ and x_2 s.t for all $x \geq x_2$ $cx+d \leq ex+f$ so ~~choosing~~ taking $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$ for all $x \geq x_0$

$ax+b \leq cx+d \leq ex+f$, $ax+b \leq ex+f$

i.e (dus) $(a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$

iii) Antisymmetric: If $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ and $(c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)$ we have x_1 and x_2 s.t for all $x \geq x_1$ $ax+b \leq cx+d$ and for all $x \geq x_2$ $cx+d \leq ax+b$. Then by taking $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$ for all $x \geq x_0$

$ax+b = cx+d$.

For instance $x = x_0$ and $\bar{x} = x_0+1$

(1) $ax_0+b = cx_0+d$

(2) $ax_0+b+a = cx_0+d+c$ so $a=c$ ((2)-(1))

and $ax_0+b = ax_0+d$, so $b=d$

so we have seen that $(a,b) = (c,d)$