LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 2015–10–22, kl 8–13.
Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

För betyg N behövs 3N-1 poäng.

Fullständiga motiveringar krävs.

1. Följden av Fibonaccis tal definieras av rekurrensekvationen $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, $n \geq 1$, där $F_1 = 1$ och $F_2 = 2$. Visa att $F_n < (\frac{7}{4})^n$, för alla $n \geq 1$.

2. Hur många åttasiffriga tal med idel olika siffror finns det där siffrorna 1, 2 och 3 förekommer direkt på varandra följande och i den ordningen?

3. Lös ekvationen $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$, där $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $n \geq 0$.

4. (a) *Diskretfolket* på MAI köper 12 krukor i olika format till KAFFEMATTE. Armen bär 4 krukor till bilen, jag bär 4 och Carl Johan bär 4. På hur många olika sätt kan krukorna bäras till bilen?

   (b) På hur många sätt kan vi ordna symbolerna $\{a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n, a_n\}$ (det finns tre av varje)?

   (c) Visa att 6^n delar $(3n)!$ för varje $n \geq 1$.

5. (a) Visa att för alla tal $n \geq 3$ gäller det att $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}$ är en kvadrat av ett heltal. Vilket heltal? (1p).

   (b) Visa att $9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ för alla tal $n \geq 0$. (2p)

6. En sammanhängande planär graf G kallas semireguljär om alla noder i G har samma gradtal $p \geq 2$, och alla regioner i G har samma gradtal $q \geq 2$, dvs varje region har en rand som består av q kanter. I så fall säger man att grafen G har typ (p, q). Visa att de enda möjliga typerna av semireguljära grafer är (2,q), (p,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3) och (5,3).

Svar TATA52 Diskret Matematik 22/10 2015

1) Visa att Fibonaccis tal $F_n \le \left(\frac{7}{4}\right)^n$ $\forall n \geq 1$ där F_n definieras $F_{n+2} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$

Med IP

i) Det stämmer att $F_1 = 1 < \frac{7}{4}$ och $F_2 = 2 < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

ii) Anta att $F_p < \left(\frac{7}{4}\right)^p$ och $F_{p-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{p-1}$ för $p \geq 2$ och vi kontrollerar att $F_{p+1} = F_p + F_{p-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{p-1}\left(\frac{7}{4}+1\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{p-1}\frac{49}{16}$ v.s.v.

2) Det finns $6 \cdot \binom{7}{5} 5!$ sådana tal, dvs 15120 tal.

6 positioner för 1 2 3

$\binom{7}{5} = 21$ val av andra 5 siffror, $5!$ positioner för de resterande 5 siffror.

3) Lös $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 3n$, $n \geq 0$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$

i) Homogendelen med kar. ekv. $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$

$$a_n^{(h)} = A_1 + A_2(2)^n + A_3(3)^n$$

ii) Partikulärdelen $a_n^{(p)} = B_1 n^2 + B_2 n$ där

$$B_1(n+3)^2 + B_2(n+3) - 6B_1(n+2)^2 - 6B_2(n+2) + 11B_1(n+1)^2 + 11B_2(n+1) - 6B_1 n^2 - 6B_2 n = 3n \text{ ; så}$$

$$\begin{cases} B_1 - 6B_1 + 11B_1 - 6B_1 = 0 & ; 0 = 0 \\ 6B_1 - 24B_1 + 22B_1 + B_2 - 6B_2 + 11B_2 - 6B_2 = 3 & ; 4B_1 = 3 ; B_1 = 3/4 \\ 9B_1 - 24B_1 + 11B_1 + 3B_2 - 12B_2 + 11B_2 = 0 & ; 2B_2 = 4B_1 ; B_2 = 3/2 \end{cases}$$

iii) BV $a_n = \frac{3n^2 + 6n}{4} + A_1 + A_2(2)^n + A_3(3)^n$

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ 1 = \frac{9}{4} + A_1 + 2A_2 + 3A_3 \\ 1 = 6 + A_1 + 4A_2 + 9A_3 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = 29/8 \\ A_2 = -3 \\ A_3 = 3/8 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{29}{8} - 3(2)^n + \frac{1}{8}(3)^{n+1}$$

4) a) $\binom{12}{4,4,4} = \frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34\,650$

b) $\binom{3n}{3,3,\ldots,3} = \frac{(3n)!}{3! \cdots 3!} = \frac{(3n)!}{6^n}$

c) Följd av b) $\frac{(3n)!}{6^n}$ är heltal så $6^n \mid (3n)!$

5 a) $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} =$

$= \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!}\left(\frac{n}{n-2}+1\right) = \frac{2\,(n-1)!\,(n-1)}{2\,(n-3)!\,(n-2)} = (n-1)^2$

Heltalet är $n-1$.

b) $9 \mid (n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)$ dvs

$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 \equiv 0 \mod 9$, dvs

$3n^3+3n^2+3n+1+6n^2+12n+8 \equiv 3n^3+0n^2+6n+0 \mod 9$

dvs $3(n^3+2n) \mod 9$. Vi studerar $3(n^3+2n) \mod 9$

n kan vara i) $n \equiv 0 \mod 3$ $\quad n=3k$

$3\cdot 3k(9k^2+2) \equiv 9k(9k^2+2) \equiv 0 \mod 9$

ii) $n \equiv 1 \mod 3$: $3(27k^3+27k^2+9k+1+6k+2) \equiv 3\cdot 3(2k+1) \equiv 0 \mod 9$
$n=3k+1$

iii) $n \equiv 2 \mod 3$, $3(27k^3+54k^2+18k+8+6k+4) \equiv 3\cdot 3(2k+1) \equiv 0 \mod 9$
$n=3k+2$

Vi har gått igenom alla möjligheter och alla är 0 mod 9

6) Eftersom G är planär av typ (p,q) följer

$pV=2E$, $qF=2E$ och $V-E+F=2$ där

V är antal noder, E = # kanter och F = # regioner

Så $\frac{2E}{p} - E + \frac{2E}{q} = 2$; $E(2q+2p-pq)=2pq$

$E = \frac{2pq}{2p+2q-pq} > 0$ med $p,q \geq 2$ så

$2p+2q-pq > 0$; $2p+2q > pq$; $(p-2)(q-2) < 4$

om $p,q \neq 2$
Nu p, och $q \leq 5$ annars, hade vi $(p-2)(q-2) \geq 16$ $= 4 <$

Solutions: If $p=2$, any q: $(2,q)$, if $q=2$ any p: $(p,2)$

Om $p=3 \Rightarrow (q-2) < 4$, $q=(2)\,3,4,5$ $\quad (3,3),(3,4),(3,5)$

Om $p=4 \Rightarrow (q-2) < 2$ $\quad q=(2),3, \Rightarrow (4,3)$

Om $p=5 \Rightarrow (q-2) < 4/3$, $q=(2),3 \Rightarrow (5,3)$

(Kontroll: om $p \geq 6 \Rightarrow (p-2)(q-2) \geq 4(q-2) < 4 \Rightarrow q=2$