LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 2015–08–20, kl 8–13.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. Fullständiga motiveringar krävs.

För betyg N behövs 3N-1 poäng.

---

1. Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

2. (a) I en släkt är alla födda i januari. Maria och Ingvar (båda 65 år i år) är barn till Beatrice, som är dotter till Clara, som är dotter till Daniella, som är dotter till Eugene, som är son till Felix, som är son till Gerd, som är dotter till Hans, som är son till Johannes, som är son till Karl, som föddes 1634 av Antonia. Visa att någon anfader/anmoder till Maria och Ingvar tillbaka till Karl hade fyllt 36 år när barnet föddes. (1p)

   (b) Man har 20 kort numrerade med tal 1 till 20. I ett spel ligger korten med talen mot bordet och en spelare ska syna 11 kort. Spelaren förlorar om 2 av de synade korten har summa 21. Kan spelaren vinna? (2p)

3. En låda innehåller 9 vita och 6 svarta bollar. Man väljer 5 bollar ur lådan

   (a) På hur många sätt kan man välja så att 3 bollar är vita och 2 svarta? (1p)

   (b) På hur många sätt kan man välja så att högst 2 bollar är vita? (2p)

   Skriv svaren som heltal

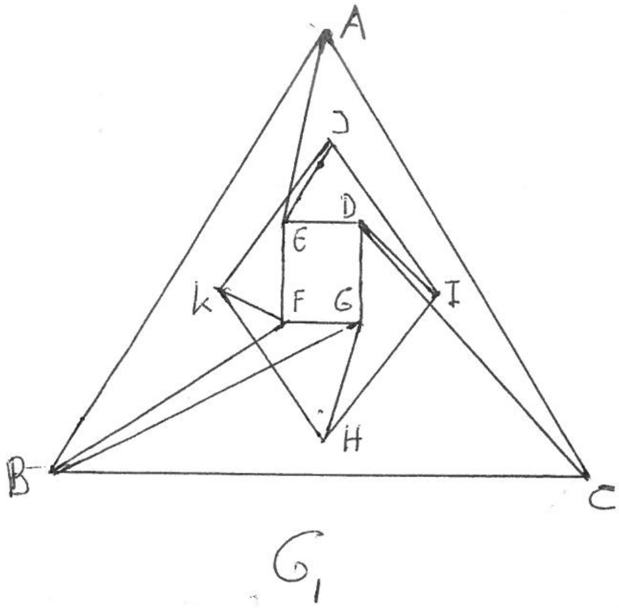
4. (a) Är grafen G_1 nedan hamiltonsk?, planär?

   (b) Ange ett billigaste spännande träd i grafen G_2

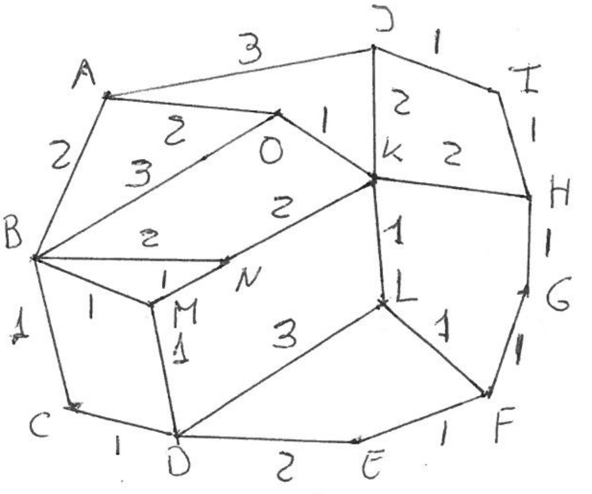
5. (a) Lös den rekursiva ekvationen $\sqrt{a_n} - 2\sqrt{a_{n-1}} = (2)^n$, $n \geq 1$, $a_0 = 0$. (2p)

   (b) Lös den rekursiva ekvationen $a_{n+1} - a_n = (2)^n + n$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$. (1p)

6. Hitta det minsta positiva heltalet x som uppfyller ekvationerna $x^2 + x \equiv 1 mod 5$, $x^2 + x \equiv 5 mod 7$ och $x^2 + x \equiv 3 mod 13$.



G_1



G_2

Svar TATA52 Discrete Matematik 20/8 2015

1) Visa att $\sum_{1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$, $\forall n \geq 1$

Vi kan visa formeln med Induktionsprincipen

i) Vi visar att formeln gäller för $n=1$ då

$$VL_1 = \frac{1}{1 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 1 + 1} = HL_1$$

ii) Vi antar att $\sum_{1}^{p} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{p}{4p+1}$ för $n=p$ och visar att formeln fortfarande gäller för $p+1$. Nu

$$VL_{p+1} = \sum_{1}^{p+1} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \underset{\text{Antagande}}{=} \frac{p}{4p+1} + \frac{1}{(4p+1)(4p+5)} =$$

$$= \frac{[p^2 4 + 5p + 1]}{(4p+1)(4p+5)} = \frac{(p+1)(4p+1)}{(4p+1)(4p+5)} = \frac{p+1}{4p+5} = HL_{p+1} \quad \text{V.S.V}$$

Med I.P. formeln gäller för alla $n \geq 1$.

2a) K — J — H — G — F — E — D — C — B — I/M
1634 ... 1950

Marie och Ingvar föddes 1950; under 316 (= 1950 − 1634) år har 9 nya generationer släkt föddes. Eftersom

$316 = 35 \cdot 9 + 1$ (och alla föddes i january)

någon i släkten var 36 år minst när den hade barnet

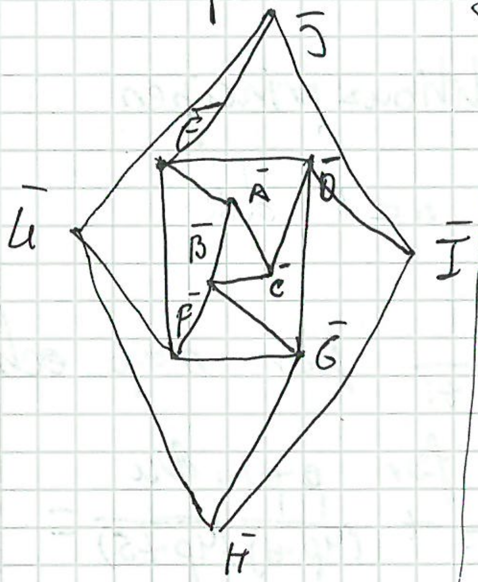
2b) Det finns 10 mängder i partitionen av de 20 korten i 2 kort som har summa 21: {1, 20}, {2, 19}, ---- {9, 12}, {10, 11}.
Om man ska välja 11 kort, minst 2 hör till samma mängd och de har summa 21. Spelaren kan ALDRIG vinna

3a) 3 ~~vita~~ av 9 vita bollar, 2 av 6 svarta bollar:

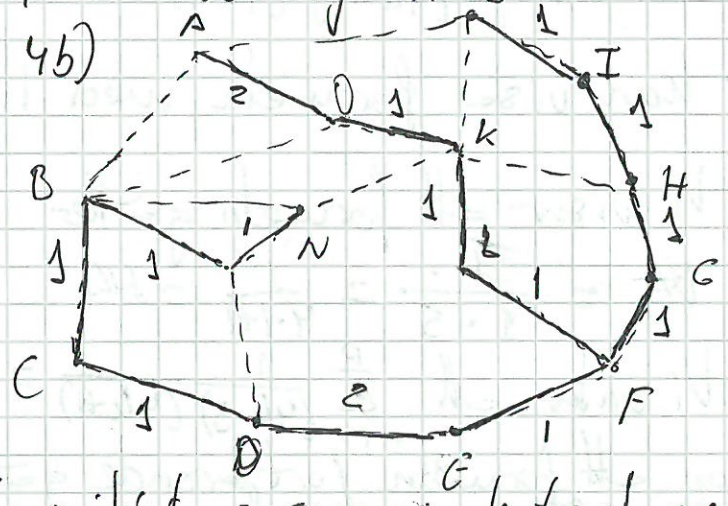
$$\binom{9}{3}\binom{6}{2} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \text{ sätt}$$

3b) $\underbrace{\binom{6}{5}}_{\text{0 vita bollar}} + \underbrace{\binom{9}{1}\binom{6}{4}}_{\text{1 vit boll}} + \underbrace{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}_{\text{2 vita bollar}} = 6 + 9 \cdot 15 + 36 \cdot 20 = 861$ sätt

a) Grafen G_1 är hamiltonsk med en hamiltonsk cykel $A \to B \to C \to D \to G \to F \to K \to H \to I \to J \to E \to A$; också planär ty G_1 är isomorf till ;



4b)



Ett möjligt uppspännande träd med kanter med etiketter. kostnaden är 16 enheter.

5a) Lös ekv $\sqrt{a_n} - 2\sqrt{a_{n-1}} = 2^n$, $n \geq 1$; $a_0 = 0$. Vi byter till $b_n = \sqrt{a_n}$ och har linjära ekv. $b_n - 2b_{n-1} = 2^n$, $b_0 = \sqrt{0} = 0$

$b_n^h = B_1 (2)^n$; så $b_n^p = C(2)^n n$, där $C(2)^n n - 2C(2)^{n-1}(n-1) = (2)^n$

och $\boxed{C = 1}$. Med BV $0 = 0 + B_1$; $B_1 = 0$ $\quad b_n = (2)^n n$

$$\boxed{a_n = n^2 (4)^n}$$

b) $a_{n+1} - a_n = (2)^n + n$; $a_n^h = A_1$; $a_n^p = (B_1 n^2 + B_2 n) + C(2)^n$

där $B_1(n+1)^2 + B_2(n+1) - B_1 n^2 - B_2 n = n$ och $2C(2)^n - C(2)^n = (2)^n$

så $C = 1$ och $B_1 = 1/2$, $B_2 = -1/2$; $a_n = \frac{n^2 - n}{2} + 2^n + A_1$. Med BV

$0 = 1 + A_1$; $A_1 = -1$ $\quad \boxed{a_n = 2^n + \frac{n^2 - n - 2}{2}}$

6) Vi löser $x^2 + x \equiv 1 \mod 5$; $x^2 + x \equiv 5 \mod 7$; $x^2 + x \equiv 3 \mod 13$ och får $x \equiv 2 \mod 5$; $x \equiv 3 \mod 7$; $x \equiv 6 \mod 13$. Nu med KRS $x \equiv (2 \cdot 91 \cdot 1 + 3 \cdot 65 \cdot 4 + 6 \cdot 35 \cdot 3) \mod 455$ där 1 är lösning av $91x_1 \equiv 1 \mod 5$; 4 löser $65x_2 \equiv 1 \mod 7$ och 6 löser $35x_3 \equiv 1 \mod 13$. Så $x \equiv 1592 \mod 455$; $\boxed{x = 227}$

För att lösa $x^2 + x \equiv 1 \mod 5$ antingen ger man listan med möjligheter $0^2+0 \not\equiv 1$; $1^2+1 \not\equiv 1$; $2^2+2 \equiv 1$, $3^2+3 \not\equiv 1$, $4^2+4 \not\equiv 1$. Eller löser 2:a grads ekvationen som brukligt: $x^2 + x + 2 \equiv 0 \mod 7$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \equiv \frac{6 \pm 0}{2} \equiv 3$$