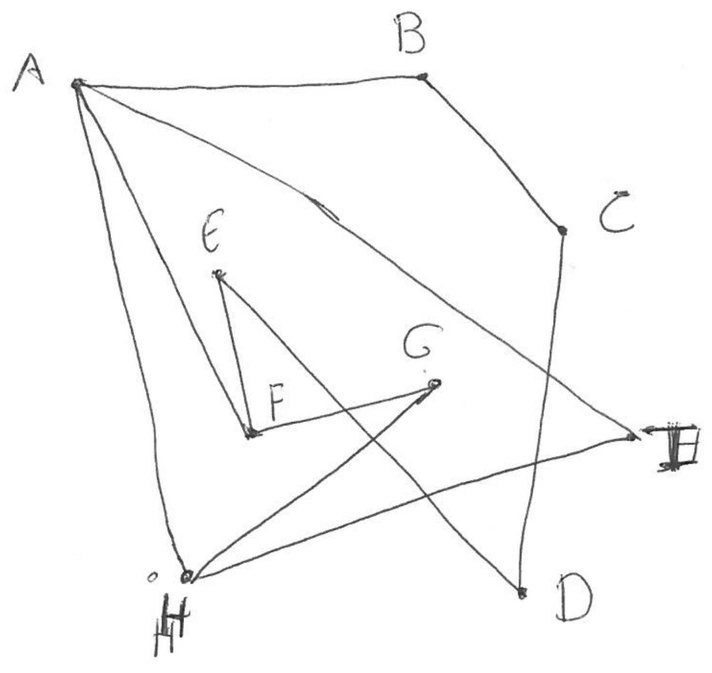
LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Milagros Izquierdo

Tentamen i Diskret Matematik, TATA52, TEN1, 2014–10–23, kl 8–13.
Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.
För betyg N behövs 3N-1 poäng.
Fullständiga motiveringar krävs.

1. Visa att $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ för alla heltal $n \geq 1$.
2. Hur många ord med två eller flera bokstäver ska man skriva för att vara säker på att minst två ord börjar med samma två bokstäver? (alfabetet har 28 bokstäver)?
3. Lös ekvationen $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 4 \cdot (2)^n + 8 \cdot (4)^n$, där $a_0 = 1, a_1 = 8$, $n \geq 0$.
4. Är grafen G nedan eulersk, hamiltonsk, planär, bipartit?
5. Betrakta mängderna $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $N = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$. Man ska till varje positivt tal $p \in P$ välja ett negativt tal $n \in N$ så att summan $p + n$ ALDRIG blir noll. På hur många sätt kan vi välja?
6. Visa att **om p, q är primtal ≥ 5** så är $p+q$ eller $p-q$ en multipel av 3. Visa också är $p+q$ eller $p-q$ är en multipel av 4. Som följd visa att $p^2 - q^2$ är delbart med 24.



Grafen G

Svar TATA52 23/10 2014

1) Visa att $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, $\forall n \geq 1$

i) För $n=1$ $1^4 = 1 = \frac{1(2)(3)(5)}{30}$: Sant

ii) Antar att $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, då

blir $\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{1}^{n} k^4 + (n+1)^4 \underset{IP}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^4}{30}$

$= \frac{(n+1)}{30}[(2n^2+n)(3n^2+3n-1)+30(n^3+3n^2+3n+1)]$

$= \frac{(n+1)}{30}[6n^4+39n^3+91n^2+89n+30] =$

$= \frac{(n+1)(n+2)(6n^3+27n^2+37n+15n)}{30} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30}$

$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1][3(n+1)^2+3(n+1)-1]}{30}$ VSV.

2) $\underline{X} \underbrace{- - - -}_{} \underline{Y}$ 28^2 har vi alla olika möjligheter

så vi behöver 28^2+1

3) Lös $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 4(2)^n + 8(4)^n$; $a_0 = 1$, $a_1 = 8$

i) Homogendelen med karakteristisk ekv $r^2 - 6r + 8 = 0$

$r = 2, 4 \implies a_n^H = A_1(2)^n + A_2(4)^n$

ii) Partikulärdelen $a_n^P = Bn(2)^n + Cn(4)^n$ där

$B(n+2)(2)^{n+2} - 6B(n+1)(2)^{n+1} + 8Bn(2)^n + C(n+2)(4)^{n+2} - 6C(n+1)(4)^{n+1} + 8Cn(4)^n$

$= 4(2)^n + 8(4)^n$

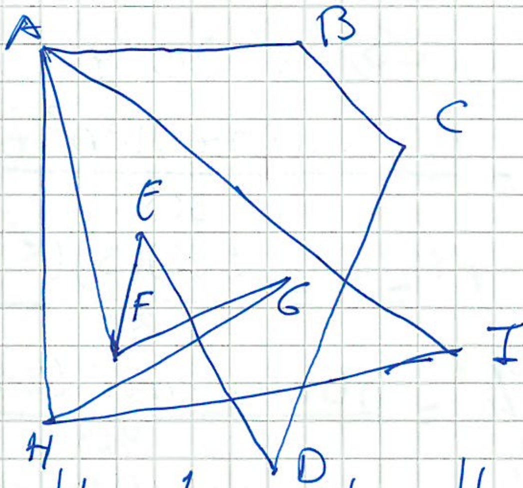
$\begin{cases} 4B(n+2) - 12B(n+1) + 8Bn = 4 \\ 16C(n+2) - 24C(n+1) + 8Cn = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} (8-12)B = 4, \ B = -1 \\ (32-24)C = 8 \quad C = 1 \end{cases}$

$a_n^P = -n(2)^n + n(4)^n$

$\begin{cases} a_0 = 1 = 0 + A_1 + A_2 \\ a_1 = 8 = -2 + 4 + 2A_1 + 4A_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 3 = A_1 + 2A_2 \end{cases}$ $\begin{matrix} A_1 = -1 \\ A_2 = 2 \end{matrix}$

$\boxed{a_n = (n+2)(4)^n - (n+1)(2)^n}$

4) Grafen

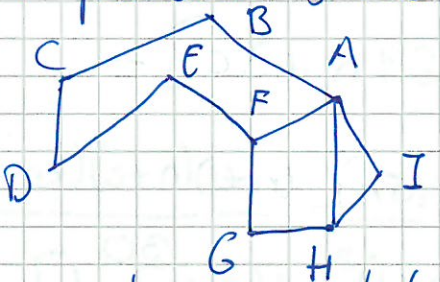


är inte eulersk ty $\deg(A)=3$, ej jämnt, $\deg(H)=3$, ej jämnt

Den är hamiltonsk, med en Hamiltoncykel

$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to A$

Det är planär, isomorf till



Det är inte bipartit ty den innehåller triangeln $A \to H \to I$

5) $P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $N=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6\}$ om $p+n$ skild noll ($p\in P$, $n \in N$) då givet p, n kan väljas alla utom $-p$. Så vi har derangemang av ordning 6

$$d_6 = 6! - 6! + \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{5!} + 1$$

$$= 720\left(\frac{60-20+5-1}{720}\right)+1 = 265 \text{ sätt}$$

6) ta $5 \le q < p$ (udda primtal) $\begin{cases} q \equiv 1 \bmod 3 & p \equiv 1 \bmod 3 \\ q \equiv 2 \bmod 3 & p \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$

$$\text{Så } p+q \equiv \begin{cases} 0 \bmod 3 & \begin{cases} q \equiv 1 \bmod 3, p \equiv 2 \bmod 3 \\ q \equiv 2 \bmod 3, p \equiv 1 \bmod 3 \end{cases} \\ 2 \bmod 3 & q \equiv 1 \bmod 3, p \equiv 1 \bmod 3 \\ 1 \bmod 3 & q \equiv 2 \bmod 3, p \equiv 2 \bmod 3 \end{cases} \Rightarrow p-q \begin{cases} \pm 1 \bmod 3 \\ 0 \bmod 3 \\ 0 \bmod 3 \end{cases}$$

På samma sätt $q \equiv \pm 1 \bmod 4$, $p \pm 1 \bmod 4$ och antingen

$p+q \equiv 0 \bmod 4$ eller $p-q \equiv 0 \bmod 4$

Och bägge $p+q$ och $p-q$ är jämna så $2 \times 4 \times 3 \mid (p+q)(p-q)$