TATA 57/TATA80 28 oktober 2017. Lösningar

1) Z-transformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren) ger

$$\left[z^2 + 5z + 6\right] Y(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

som i sin tur ger (efter ommöblering)

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z+3)(z^2+1)}.$$

Av detta får vi

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z+2)(z+3)(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+1}\right]\end{aligned}$$

och således har vi

$$Y(z) = \frac{1}{10}\left[\frac{2z}{z+2} - \frac{z}{z+3} + \frac{z}{z^2+1} - \frac{z^2}{z^2+1}\right]$$

och vi erhåller

$$y(k) = \frac{1}{10}\left[2(-2)^k - (-3)^k - \cos\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Laplacetransformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoret) ger

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s - 2 + \frac{1}{(s^2+1)}$$

som ger (efter ommöblering i VL och HL)

$$Y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + s - 1}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$Y(s) = \frac{1}{10}\left[\frac{5}{s-1} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+1}\right]$$

av vilket vi erhåller

$$y(t) = \frac{1}{10}\left[5e^t + 2e^{2t} + \sin t + 3\cos t\right] \quad t \geq 0.$$

3) Fourierserien är

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Koefficienterna a_k ges nu av

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos kt\,dt \\ &= \frac{[(-1)^k - 1]}{\pi k^2} \end{aligned}$$

för $k \geq 1$ och för $k = 0$ erhåller vi $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$ vilket ger att $a_k = 0$ för jämna $k \geq 2$ och för udda k har vi

$$a_k = -\frac{2}{\pi k^2}.$$

Koefficienterna $b_k,\ k \geq 1$ ges genom

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin kt\,dt = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Fourierserien är

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^k \sin kt}{k}.$$

Funktionen $f(t)$ är kontinuerlig i $t = 0$ men diskontinuerlig i $t = \pm\pi + 2n\pi$ med $n \in \mathbb{Z}$, och uppfyller alla krav i Dirichlets Sats och då konvergerar $f(t)$:s fourierserie punktvis mot $f(0) = 0$ i $t = 0$ medan den konvergerar mot $\dfrac{f(t_+) + f(t_-)}{2}$ i diskontinuitetspunkter. I $\pm\pi$ konvergerar serien mot $\dfrac{\pi}{2}$.

Eftersom fourierserien konvergerar mot $f(0) = 0$ i $t = 0$ så har vi

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} = 0$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4) Fouriertransformering av ekvationen ger

$$[(i\omega)^2 - 3i\omega + 2]Y(\omega) = \frac{36}{(1+i\omega)^2}$$

av vilket vi erhåller (efter ommöbleringar i V.L. och H.L.)

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{36}{(1-i\omega)(2-i\omega)(1+i\omega)^2} \\ &= \frac{5}{1+i\omega} + \frac{6}{(1+i\omega)^2} + \frac{9}{1-i\omega} - \frac{4}{2-i\omega} \end{aligned}$$

och av detta erhåller vi

$$y(t) = (6t+5)\, e^{-t}\chi(t) + \left(9e^t - 4e^{2t}\right)\chi(-t).$$

5) Att $y''(t)$ existerar betyder att $y'(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga och deriverbara och eftersom $\sin t$ är kontinuerligt deriverbar, så måste $y''(t)$ vara kontinuerligt deriverbar.Vi kan alltså sätta

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik) c_k e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2) c_k e^{ikt}$$

där c_k är $y(t)$:s fourierkoefficienter. Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2 + i(-1)^k k + 2) c_k e^{ikt} = \frac{1+i}{2} e^{ikt} + \frac{1-i}{2} e^{-ikt}.$$

Vi erhåller

$$(-k^2 + i(-1)^k k + 2) c_k = 0 \quad \text{för } k \neq \pm 1$$

vilket ger $c_k = 0$ för $k \neq \pm 1$ eftersom $-k^2 + i(-1)^k k + 2 = 0$ endast om $ik = 0$ och $-k^2 + 2 = 0$ vilket ger $2 = 0$, som är en motsägelse. För $k = \pm 1$ får vi:

$$(1-i)c_1 = \frac{1+i}{2}, \quad (1+i)c_{-1} = \frac{1-i}{2}$$

av vilket vi erhåller

$$c_1 = \frac{i}{2}, \quad c_{-1} = -\frac{i}{2}$$

och då får vi

$$y(t) = \frac{i}{2}\left[e^{it} - e^{-it}\right] = -\sin t.$$

Svar: $y(t) = -\sin t$.

6) Med

$$f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1-\cos 2t}{2t^2}, \quad g(t) = \frac{1}{t^2+4}$$

kan integralen skrivas som

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Enligt Plancherels Sats har vi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-2}^{2} \pi(2-|\omega|)\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}\,d\omega \\
&= \frac{4\pi}{2}\int_{0}^{2} (2-\omega)e^{-2\omega}\,d\omega \\
&= \frac{\pi}{16}\left(3+\frac{1}{e^4}\right).
\end{aligned}$$

7) Sätt

$$f_n(x) = \frac{16\arctan x}{1+x^2+\frac{x^4}{n^2}}.$$

$f_n(x)$ konvergerar punktvis mot $f(x) = \frac{16\arctan x}{1+x^2}$ för varje $0 \le x \le 1$. Vidare har vi att

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left|\frac{16\arctan x}{1+x^2} - \frac{16\arctan x}{1+x^2+\frac{x^4}{n^2}}\right| \\
&= \frac{16x^4}{n^2}\frac{\arctan x}{(1+x^2)(1+x^2+\frac{x^4}{n^2})} \\
&\le \frac{4\pi}{n^2}
\end{aligned}$$

för alla $x \in [0,1]$ och då ser vi att

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

vilket betyder att $f_n(x) \to f(x)$ likformigt på $[0,1]$. Således har vi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{16\arctan x}{1+x^2}\,dx \\
&= \big[8\arctan^2 x\big]_0^1 \\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$