TATA 57/TATA80 30 maj 2017. Lösningar

1) Z-transformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren) ger

$$\left[z^2 + \frac{z}{z-2}\right] Y(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$$

som i sin tur ger (efter ommöblering)

$$Y(z) = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2(z^2+1)}.$$

Av detta får vi

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z-2}{(z-1)^2(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+1}\end{aligned}$$

och således har vi

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} - \frac{z^2}{z^2+1}$$

och vi erhåller

$$y(k) = \frac{1}{2}\left[2 - k - 2\cos\frac{k\pi}{2} - \sin\frac{k\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Laplacetransformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoret) ger

$$(s^2+3s+2)Y(s) = s + 1 + \frac{s}{s^2+1}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}$$

och då erhåller vi

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s+2} + \frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} \\
&= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{10}\left[\frac{s+3}{s^2+1} + \frac{4}{s+2} - \frac{5}{s+1}\right] \\
&= \frac{1}{10}\left[\frac{14}{s+2} - \frac{5}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{s^2+1}\right]
\end{aligned}
$$

och då får vi att

$$
y(t) = \frac{1}{10}\left[14e^{-2t} - 5e^{-t} + \cos t + 3\sin t\right], \quad t \geq 0.
$$

3) Fourierserien är

$$
f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.
$$

Vi ser att $f(t) = \pi^2 - t^2$ är en jämn funktion och då är $b_k = 0$ för alla $k = 1, 2, \ldots$.Koefficienterna a_k ges nu av

$$
a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos kt\, dt.
$$

För $k = 0$ erhåller vi $a_0 = \dfrac{4\pi^2}{3}$ och för $k \geq 1$ har vi

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos kt\, dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos kt\, dt \\
&= \frac{(-1)^{k+1}4}{k^2}
\end{aligned}
$$

Funktionen $f(t)$ är kontinuerlig och då konvergerar fourierserien mot värdet $f(t)$ i varje t. Då har vi

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos kt}{k^2}.$$

I synnerhet har vi

$$f(\pi) = 0 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

som ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Enligt Parsevals Sats har vi nu att

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

vilket ger

$$\frac{8\pi^4}{9} + 16\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\, dt = \frac{16\pi^4}{15}$$

och då får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4) Fouriertransformering av ekvationen ger

$$[(i\omega)^2 + 3i\omega + 2]Y(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1-i\omega} = -\frac{1}{(1-i\omega)^2}$$

av vilket vi erhåller

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= -\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)(1-i\omega)^2} \\
&= [z = i\omega] \\
&= -\frac{1}{(1+z)(2+z)(1-z)^2} \\
&= \frac{1}{36}\left[\frac{4}{2+z} - \frac{9}{1+z} - \frac{6}{(1-z)^2} - \frac{5}{1-z}\right] \\
&= [z = i\omega] \\
&= \frac{1}{36}\left[\frac{4}{2+i\omega} - \frac{9}{1+i\omega} - \frac{6}{(1-i\omega)^2} - \frac{5}{1-i\omega}\right] \\
&= \frac{1}{36}\left[\frac{4}{2+i\omega} - \frac{9}{1+i\omega} - \frac{5}{1-i\omega} + i\frac{d}{d\omega}\frac{6}{(1-i\omega)}\right]
\end{aligned}
$$

och då, med regeln $\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = iF'(\omega)$, erhåller vi att

$$
y(t) = \frac{1}{36}\left[(6t-5)e^{t}\chi(-t) + (4e^{-2t} - 9e^{-t}\chi(t)\right].
$$

5) Att $y''(t)$ existerar betyder att $y'(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga och deriverbara och eftersom $\sin t$ är kontinuerligt deriverbar, så måste $y''(t)$ vara kontinuerligt deriverbar.Vi kan alltså sätta

$$
y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(ik)c_k e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-k^2)c_k e^{ikt}
$$

där c_k är $y(t)$:s fourierkoefficienter. Insättning i differentialekvationen ger

$$
\sum_{-\infty}^{\infty}(-k^2 + ik + 2(-1)^k)c_k e^{ikt} = 1 - \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}.
$$

Vi erhåller

$$(-k^2 + ik + 2(-1)^k)c_k = 0 \quad \text{för } k \neq 0, \pm 2$$

vilket ger $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$ eftersom $-(-k^2 + ik + 2(-1)^k) = 0$ ger $k^2 = 2(-1)^k$ och $k = 0$, av vilket vi får $2 = 0$, som är omöjligt.Således är $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$.

För $k = 0$ har vi $2c_0 = 1$ vilket ger $c_0 = 1/2$. För $k = 2$ har vi $(-2 + 2i)c_2 = -1/2$ vilket ger $c_2 = (1 + i)/8$. För $k = -2$ erhåller vi $c_{-2} = (1 - i)/8$

vilket ger

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\cos 2t - \sin 2t\right].$$

6) Med

$$f(t) = e^{-|t|}, \quad g(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

kan integralen skrivas som

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Enligt Plancherels sats har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\, d\omega$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\frac{1-\cos t}{t^2}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2}{\omega^2+1}\pi(1-|\omega|)\,d\omega \\
&= 2\int_0^1 \frac{1-\omega}{\omega^2+1}\,d\omega \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{1}{\omega^2+1}-\frac{\omega}{\omega^2+1}\right]\,d\omega \\
&= \frac{\pi}{2}-\ln 2.
\end{aligned}
$$

7) Serien är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

med $u_k(x) = \dfrac{\cos kx}{k^3+x^2}$. Vi har

$$|u_k(x)| \leq \frac{|\cos kx|}{k^3+x^2} \leq \frac{1}{k^3}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ och serien $\displaystyle\sum_1^{\infty} 1/k^3$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent och därmed punktvis konvergent på $\mathbb{R}$. Vidare har vi att att

$$u_k'(x) = -\frac{k\sin kx}{k^3+x^2} - \frac{2x\cos kx}{(k^3+x^2)^2}$$

och med hjälp av triangelolikheten får vi

$$
\begin{aligned}
|u_k'(x)| &\leq \frac{k}{k^3+x^2} + \frac{2|x|}{(k^3+x^2)^2} \\
&\leq \frac{1}{k^2} + \frac{2\sqrt{k^3+x^2}}{(k^3+x^2)^2} \\
&\leq \frac{1}{k^2} + \frac{2}{(k^3+x^2)^{3/2}} \\
&\leq \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^{9/2}}
\end{aligned}
$$

Serierna $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{9/2}}$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är då serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. Funktionerna $u_k'(x)$ är kontinuerliga på $\mathbb{R}$ och då är $f(x)$ en kontinuerligt deriverbar funktion med

$$
f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).
$$