TATA 57/TATA80 20 oktober 2016. Lösningar

1) Z-transformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren) ger

$$(z^2+1)Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

som i sin tur ger (efter ommöblering)

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z^2+1)}.$$

Av detta får vi

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-1)(z-2)(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{4}{z-2} - \frac{5}{z-1} + \frac{z}{z^2+1} - \frac{3}{z^2+1}\right]\end{aligned}$$

och således har vi

$$Y(z) = \frac{1}{10}\left[\frac{4z}{z-2} - \frac{5z}{z-1} + \frac{z^2}{z^2+1} - \frac{3z}{z^2+1}\right]$$

och vi erhåller

$$y(k) = \frac{1}{10}\left[2^{k+2} + \cos\frac{k\pi}{2} - 3\sin\frac{k\pi}{2} - 5\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Laplacetransformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoret) ger

$$(s^2+4)Y(s) = s - 2 + \frac{1}{s^2+1}$$

och då erhåller vi

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s-2}{s^2+4} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{s^2+1} + \frac{6s}{s^2+4} - \frac{14}{s^2+4}\right]
\end{aligned}
$$

och då får vi att

$$
y(t) = \frac{1}{6}\left[2\sin t + 6\cos 2t - 7\sin 2t\right], \quad t \geq 0.
$$

3) Fourierserien är

$$
f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.
$$

Vi får (efter standardkalkyler)

$$
a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi}\frac{[1-(-1)^k]}{k^2}, \quad k \geq 1.
$$

Vi har även

$$
b_k = \frac{1+2(-1)^k}{2k}, \quad k \geq 1.
$$

och då är fourierserien

$$
f(t) \sim \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1^k)]}{2\pi k^2}\cos kt + \frac{[1+2(-1)^k]}{2k}\sin kt.
$$

Serien konvergerar i varje t mot värdet $\dfrac{f(t_+)+f(t_-)}{2}$. Då får vi värdet

$$
\frac{0+\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}
$$

i $t=0$ och i $t=\pm\pi$ erhåller vi värdet 0.

För $t = 0$ har vi då

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1^k)]}{2\pi k^2}$$

vilket ger

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

eftersom $1 - (-1^k) = 0$ för jämna k medan $1 - (-1^k) = 2$ för udda k, och vi sätter $k = 2n + 1$ med $n \geq 0$ för udda $k \geq 1$. Vi erhåller alltså

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4) Fouriertransformering av ekvationen ger

$$\left[(i\omega)^2 - \frac{4}{\omega^2 + 4}\right] Y(\omega) = \frac{2i\omega}{\omega^2 + 4}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{2i\omega}{(i\omega)^2(\omega^2 + 4) - 4} \\ &= [z = i\omega] \\ &= \frac{2z}{z^2(-z^2 + 4) - 4} \\ &= \frac{-2z}{z^4 - 4z^2 + 4} \\ &= \frac{-2z}{(z^2 - 2)^2}. \end{aligned}$$

Av detta följer, med $z = i\omega$, att

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{-2i\omega}{(\omega^2+2)^2} \\
&= i\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\omega^2+2} \\
&= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|}\right](\omega)
\end{aligned}
$$

och av detta erhålles

$$
y(t) = \frac{t}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|t|}.
$$

5) Att $y''(t)$ existerar betyder att $y'(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga och deriverbara och eftersom $\sin t$ är kontinuerligt deriverbar, så måste $y''(t)$ vara kontinuerligt deriverbar.Vi kan alltså sätta

$$
y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(ik)c_k e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-k^2)c_k e^{ikt}
$$

där c_k är $y(t)$:s fourierkoefficienter. Insättning i differentialekvationen ger

$$
\sum_{-\infty}^{\infty}(-k^2 + (-i)^k)c_k e^{ikt} = i\left[e^{it} - e^{-it}\right].
$$

Vi erhåller

$$
(-k^2 + (-i)^k)c_k = 0 \quad \text{för } k \neq \pm 1
$$

vilket ger $c_k = 0$ för $k \neq \pm 1$ eftersom $-k^2 + (-i)^k = 0$ ger $k^2 = (-i)^k$ som inte har några lösningar för $k \neq \pm 1$ eftersom vi har även $k^2 = |(-i)|^k = 1$ vilket är en motsägelse då $k \neq \pm 1$. Således är $c_k = 0$ för $k \neq \pm 1$. För $k = \pm 1$ har vi

$$-(1+i)c_1 = i, \quad (-1+i)c_{-1} = -i$$

vilket ger

$$c_1 = -\frac{1+i}{2}, \quad c_{-1} = \frac{-1+i}{2}$$

och då får vi (efter lite arbete)

$$y(t) = \sin t - \cos t.$$

6) Observera att $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$. Vi kan då skriva integralen som

$$I = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos 2t)}{t^2}\frac{1}{t^2+4}\,dt.$$

Sätt

$$f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t^2}, \quad g(t) = \frac{1}{4+t^2}.$$

Då är, enligt Plancherels Sats,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\,d\omega \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_{-2}^{2} \pi(2-|\omega|)\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}\,d\omega \\
&= \frac{\pi}{8}\int_{0}^{2} (2-\omega)e^{-2\omega}\,d\omega \\
&= \frac{\pi}{32}\left[3 + \frac{1}{e^4}\right].
\end{aligned}$$

7) Sätt

$$f_k(x) = \frac{\arctan kx}{1 + x^2/k^2}.$$

På intervallet $[1, 3]$ konvergerar denna function punktvis mot den konstanta funktionen $\frac{\pi}{2}$: vi har $\arctan k \leq \arctan kx \leq \arctan 3k$ på detta intervall och då ser vi att $\arctan kx \to \frac{\pi}{2}$ för varje $x \in [1, 3]$. Vidare ser vi att

$$\frac{1}{1 + x^2/k^2} \to 1, \quad k \to \infty$$

för varje $x \in [1, 3]$. Av detta följer att $f_k(x) \to \frac{\pi}{2}$ punktvis på intervallet. Eftersom

$$\arctan k \leq \arctan kx \leq \arctan 3k$$

och

$$\frac{1}{1 + 9/k^2} \leq \frac{1}{1 + x^2/k^2} \leq \frac{1}{1 + 1/k^2}$$

på intervallet då måste

$$\frac{\arctan k}{1 + 9/k^2} \leq f_k(x) \leq \frac{\arctan 3k}{1 + 1/k^2}$$

på intervallet, av vilket det följer att

$$\left| \frac{\pi}{2} - f_k(x) \right| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan k}{1 + 9/k^2}$$

för alla $x \in [1, 3]$. Då har vi att

$$\sup_{x \in [1,3]} \left| \frac{\pi}{2} - f_k(x) \right| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\arctan k}{1 + 9/k^2} \to 0$$

då $k \to \infty$, vilket bevisar att $f_k(x) \to \pi/2$ likformigt på intervallet $[1, 3]$ och då får vi att

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^3 \frac{\arctan kx}{1+x^2/k^2}\,dx = \int_1^3 \frac{\pi}{2}dx = \pi.$$