TATA 57/TATA80 18 augusti 2016. Lösningar

1) Lösning 1: Z-transformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren) ger

$$\left[z + \frac{z}{z-3}\right] Y(z) = z + \frac{z}{z-2}$$

som i sin tur ger (efter ommöblering)

$$Y(z) = \frac{(z-1)(z-3)}{(z-2)^2}.$$

Av detta får vi

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{(z-1)(z-3)}{z(z-2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{z} + \frac{1}{z-2} - \frac{2}{(z-2)^2}\right] \end{aligned}$$

och således har vi

$$Y(z) = \frac{1}{4}\left[3 + \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{(z-2)^2}\right]$$

och vi erhåller

$$y(k) = \frac{1}{4}\left[3\,\delta(k) + 2^k - k\,2^k\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösning 2: Alternativt kan man resonera så här: med

$$Y(z) = \frac{(z-1)(z-3)}{(z-2)^2}.$$

har vi

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{(z-1)(z-3)}{(z-2)^2} \\
&= \frac{(z^2-4z+3)}{(z-2)^2} \\
&= \frac{(z-2)^2-1}{(z-2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(z-2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2} z^{-1} \frac{2z}{(z-2)^2} \\
&= \mathcal{Z}[\delta(k)] - \frac{1}{2} z^{-1} \mathcal{Z}[k\,2^k] \\
&= \mathcal{Z}[\delta(k)] - \frac{1}{2} \mathcal{Z}[(k-1)2^{k-1}\chi(k-1)]
\end{aligned}
$$

och vi ser att

$$y(k) = \delta(k) - (k-1)2^{k-2}\chi(k-1)$$

för alla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Bägge uttryckena är lösningar till differensekvationen (som kan visas efter lite ansträngande kalkyler).

2) Laplacetransformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoret) ger

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = s + \frac{1}{s^2+1}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{(s^3 + s + 1)}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$$

och då erhåller vi

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{(s^3 + s + 1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{7s+3}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+1}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{7(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{4}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+1}\right]
\end{aligned}
$$

och då får vi att

$$
y(t) = \frac{1}{5}\left[e^{-t}\left(7\cos t - 4\sin t\right) + \sin t - 2\cos t\right], \quad t \geq 0.
$$

3) Fourierserien är

$$
f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos t \cos kt \, dt - \int_{-\pi}^{0} \cos t \cos kt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos t \cos kt \, dt + \int_{\pi}^{0} \cos t \cos kt\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eftersom

$$
-\int_{-\pi}^{0} \cos t \cos kt = [t = -u] = \int_{\pi}^{0} \cos u \cos ku \, du.
$$

Vidare är

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos t \sin kt\, dt - \int_{-\pi}^{0} \cos t \sin kt\, dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \sin kt\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin(k+1)t + \sin(k-1)t\right]\, dt.
\end{aligned}
$$

För $k = 1$ erhåller vi $b_1 = 0$ och för $k \geq 2$ har vi

$$
\begin{aligned}
b_k &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(k+1)t}{k+1} + \frac{\cos(k-1)t}{k-1}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1} + \frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}\right] \\
&= \frac{1+(-1)^k}{\pi}\left[\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}\right] \\
&= \frac{1+(-1)^k}{\pi}\frac{2k}{k^2-1}
\end{aligned}
$$

och vi erhåller $b_k = o$ för udda $k \geq 2$ medan för jämna k med $k = 2n$ har vi

$$
b_k = b_{2n} = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}.
$$

Således erhåller vi

$$
f(t) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nt.
$$

Observera att funktionen är kontinuerlig i alla punkter $t \neq m\pi$ med $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Fourierserien konvergerar punktvis mot $\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2}$ i varje t. I synnerhet ser vi att fourierserien konvergerar punktvis mot värdet 0 i $t = 0, \pm\pi$ ty $f(m\pi_-) = -1$ och $f(m\pi_+) = 1$.

Enligt Parsevals Sats har vi nu att

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

vilket ger

$$\frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = 1$$

och då får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

4) Ekvationen kan skrivas som

$$y'(t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) e^{-3u} \chi(u) \, du = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t.$$

Fouriertransformering av denna ekvationen ger

$$[(i\omega) + \frac{2}{3+i\omega}] Y(\omega) = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$$

Vi har då (efter lite arbete)

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= -\frac{2i\omega(3+i\omega)}{(1+i\omega)(2+i\omega)(1+\omega^2)} \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{2}{2+i\omega} - \frac{3}{1+i\omega} + \frac{3}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{1-i\omega} \right] \end{aligned}$$

Observera att

$$\frac{1}{(1+i\omega)^2} = i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{1+i\omega}$$

och, med regeln $\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = iF'(\omega)$ samt $\mathcal{F}[e^{-at}\chi(t)](\omega) = 1/(a + i\omega)$, $a > 0$, vi erhåller

$$y(t) = \frac{2}{3}\left[2e^{-2t} + 3(t-1)e^{-t}\right]\chi(t) - \frac{2e^t}{3}\chi(-t).$$

5) Att $y''(t)$ existerar betyder att $y'(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga och deriverbara och eftersom $\sin t$ är kontinuerligt deriverbar, så måste $y''(t)$ vara kontinuerligt deriverbar.Vi kan alltså sätta

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)c_k e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2)c_k e^{ikt}$$

där c_k är $y(t)$:s fourierkoefficienter. Insättning i differentialekvationen ger

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2 + (-1)^k)c_k e^{ikt} = 1 + \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}.$$

Vi erhåller

$$(-k^2 + (-1)^k)c_k = 0 \quad \text{för } k \neq 0, \pm 2$$

vilket ger $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$ eftersom $-k^2+(-1)^k = 0$ ger $k^2 = (-1)^k$ och då måste k vara jämnt ty $k^2 > 0$ för $k \neq 0, \pm 2$. Detta ger $k^2 > 1$ och således saknar $-k^2 + (-1)^k = 0$ reella lösningar. Således är $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$.

För $k = 0$ har vi $c_0 = 1$ och för $k = \pm 2$ har vi $-3c_{\pm 2} = 1/2$ vilket ger

$$y(t) = 1 - \frac{1}{3}\cos 2t.$$

6) Integralen är

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-\cos t)^2}{t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos t)^2}{t^4}\,dt.$$

Med

$$f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t^2}$$

har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos t)^2}{t^4}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

och enligt Plancherels sats har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 t - 2\cos t + 1}{t^4} dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} (1-|\omega|)^2\, d\omega \\
&= \pi\int_{0}^{1} (\omega-1)^2\, d\omega \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

och vi erhåller

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(1-\cos t)^2}{t^4}\, dt = \frac{\pi}{6}.$$

7) Serien är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

med $u_k(x) = \dfrac{\arctan x}{k^2+x^2}$. Vi har

$$|u_k(x)| \leq \frac{|\arctan x|}{k^2+x^2} \leq \frac{\pi}{2k^2}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ och serien $\sum\limits_{1}^{\infty} 1/k^2$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent och därmed punktvis konvergent på $\mathbb{R}$. Vidare har vi att att

$$u_k'(x) = \frac{1}{(k^2+x^2)(1+x^2)} - \frac{2x \arctan x}{(k^2+x^2)^2}$$

och

$$|u_k'(x)| \leq \frac{1}{(k^2+x^2)(1+x^2)} + \frac{2|x||\arctan x|}{(k^2+x^2)^2}$$

Vi har

$$\frac{1}{(k^2+x^2)(1+x^2)} \leq \frac{1}{k^2}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Vidare är

$$\frac{2|x||\arctan x|}{(k^2+x^2)^2} \leq \frac{\pi\sqrt{k^2+x^2}}{(k^2+x^2)^2} \leq \frac{\pi}{(k^2+x^2)^{3/2}} \leq \frac{\pi}{k^3}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Serierna $\sum\limits_{1}^{\infty} 1/k^2, \quad \sum\limits_{1}^{\infty} 1/k^3$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. Funktionerna $u_k'(x)$ är kontinuerliga på $\mathbb{R}$ och då är $f(x)$ en kontinuerligt deriverbar funktion med

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(k).$$