LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 57/TATA80 Transformteori. 2016.08.18, kl.8-13. TEN 1.

Inga hjälpmedel tillåtna förutom tabellerna *Transformteori. Sammanfattning, Formler & Lexikon* (ni får använda era egna exemplar). Varje uppgift ger 0-3 poäng. En godkänd uppgift är den som bedöms med minst 2 poäng. Betyg N, med $N = 3, 4, 5$, fås med $3N - 1$ poäng samt N godkända uppgifter. Lösningar till tentamen ska finnas på kursens hemsida efter tentamens slut.

---

1) Lös differensekvationen

$$y(k+1) + \sum_{m=0}^{k} y(m)3^{k-m} = 2^k$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$, där $y(0) = 1$.

2) Lös ekvationen

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \sin t$$

för $t \geq 0$ och med $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

3) Funktionen $f(t)$ har period 2π och definieras som $f(t) = \begin{cases} -\cos t & -\pi < t < 0 \\ \cos t & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$.

Beräkna $f(t)$:s fourierserie och beräkna sedan värdet på serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

Mot vilka värden konvergerar fourierserien i $t = 0, \pm\pi$? Motivera noga.

4) Finn alla lösningar $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$y'(t) + 2\int_0^{\infty} y(t-u)e^{-3u}du = e^{-|t|}\text{sgn}t.$$

5) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som har period 2π och uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + y(t-\pi) = 2\cos^2 t$$

Motivera noga.

6) Beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 t - 2\cos t + 1}{t^4}\, dt.$$

7) Visa att serien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan x}{k^2 + x^2}$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$.

Motivera noga.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 57/TATA80 Transform Theory, 2016.08.18, 08-13 TEN 1.

Each question can give 0, 1, 2 or 3 points. An answer is deemed to be good if it is marked with at least 2 points. For grade n, $n = 3, 4, 5$, you need $3n - 1$ points and n good answers.
ERASMUS students will have their grades marked according to the scale: A=grade 5, B=grade 4, C=grade 3.
You are allowed to use your own copies of *Transformteori. Sammanfattning, Formler & Lexikon.* No calculators are allowed.
Solutions to the examination can be found on the course homepage after the examination.

---

1) Solve the difference equation

$$y(k+1) + \sum_{m=0}^{k} y(m)3^{k-m} = 2^k$$

for $k = 0, 1, 2, \ldots$, where $y(0) = 1$.

2) Solve the differential equation

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \sin t$$

for $t \geq 0$ with $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

3) The function $f(t)$ has period 2π and is given by $f(t) = \begin{cases} -\cos t & -\pi < t < 0 \\ \cos t & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$.

Caclculate the Fourier series for $f(t)$ and then find the value of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$$

To what values does the Fourier series converge at $t = 0, \pm\pi$? Give reasons for your working.

4) Find all functions $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ which are solutions of the differential equation

$$y'(t) + 2\int_0^\infty y(t-u)e^{-3u}du = e^{-|t|}\text{sgn}t.$$

5) Find all 2π-periodic functions $y(t)$ that satisfy the differential equation

$$y''(t) + y(t-\pi) = 2\cos^2 t$$

Give reasons for your working.

6) Calculate the integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 t - 2\cos t + 1}{t^4}\,dt.$$

7) Show that the series $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan x}{k^2 + x^2}$ defines a continuously differentiable function for all $x \in \mathbb{R}$. Give reasons for your working.