TATA 57/TATA80 3 juni 2016. Lösningar

1) Z-transformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoren) ger

$$(z^2+1)Y(z) = z^2 + z + \frac{z}{z-2}$$

som i sin tur ger (efter ommöblering)

$$Y(z) = \frac{z(z^2-z-1)}{(z-2)((z^2+1)}.$$

Av detta får vi

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z} &= \frac{z^2-z-1}{(z-2)((z^2+1)}\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z-2} + \frac{4z+3}{z^2+1}\right]\end{aligned}$$

och således har vi

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{1}{5}\left[\frac{z}{z-2} + \frac{4z^2+3z}{z^2+1}\right]\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{z}{z-2} + \frac{4z^2}{z^2+1} + \frac{3z}{z^2+1}\right]\end{aligned}$$

och vi erhåller

$$y(k) = \frac{1}{5}\left[2^k + 4\cos k\frac{\pi}{2} + 3\sin k\frac{\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2) Laplacetransformering av ekvationen (med hänsyn tagen till begynnelsevillkoret) ger

$$(s^2-s-2)Y(s) = s + 1 + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

eller

$$(s+1)(s-2)Y(s) = \frac{(s+1)(s^2+2s+3)}{s^2+2s+2}$$

och då erhåller vi

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2+2s+3}{(s-2)(s^2+s+2)} \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{11}{s-2} - \frac{(s+4)}{(s+1)^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{10}\left[\frac{11}{s-2} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{(s+1)^2+1}\right] \end{aligned}$$

och då får vi att

$$y(t) = \frac{1}{10}\left[11e^{2t} - e^{-t}(\cos t + 3\sin t)\right], \quad t \geq 0.$$

3) Fourierserien är

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Vi har

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos kt\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [\sin(k+1)t - \sin(k-1)t]\, dt \end{aligned}$$

vilket ger (efter standarkalkyler)

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{1}{\pi}\frac{[1+(-1)^k]}{k^2-1} \quad k \geq 0, k \neq 1.$$

Då är $a_k = 0$ för udda k och

$$a_k = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}$$

för jämna $k \geq 0$. I synnerhet är $a_0 = \frac{2}{\pi}$.

Vi har även

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\cos(k-1)t - \cos(k+1)t] \, dt \end{aligned}$$

För $k = 1$ erhåller vi

$$b_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2}$$

och $b_k = o$ för $k \geq 2$.

Observera att funktionen är kontinuerlig i alla punkter t och detta innebär att fourierserien konvergerar punktvis mot $f(t)$ i varje t. Detta ger nu

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2-1}.$$

För $t = 0$ får vi $f(0) = 0$ och då är

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = 0$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

och då har vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = -\frac{1}{2}$$

Enligt Parsevals sats har vi

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2$$

som i vårt fall ger

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt$$

som ger

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{2}$$

och vi erhåller då att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$$

och då är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2+8}{16}$$

4) Fouriertransformering av ekvationen ger

$$[(i\omega)^2 + 3i\omega + 2]Y(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}$$

Vi har då (efter lite arbete)

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{(2+i\omega)(1+i\omega)^3} \\
&= \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2} + \frac{1}{(1+i\omega)^3} - \frac{1}{2+i\omega}
\end{aligned}
$$

Observera att

$$
\frac{1}{(1+i\omega)^2} = i\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1+i\omega}, \qquad \frac{1}{(1+i\omega)^3} = \frac{i}{2}\frac{d}{d\omega}\frac{1}{(1+i\omega)^2}
$$

och, med regeln $\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = iF'(\omega)$ samt $\mathcal{F}[e^{-at}\chi(t)](\omega) = 1/(a + i\omega),\ a > 0$, vi erhåller

$$
y(t) = \left[(t^2 - 2t + 2)\frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t}\right]\chi(t).
$$

5) Att $y''(t)$ existerar betyder att $y'(t)$ och $y(t)$ är kontinuerliga och deriverbara och eftersom $\sin t$ är kontinuerligt deriverbar, så måste $y''(t)$ vara kontinuerligt deriverbar.Vi kan alltså sätta

$$
y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (ik)c_k e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2)c_k e^{ikt}
$$

där c_k är $y(t)$:s fourierkoefficienter. Insättning i differentialekvationen ger

$$
\sum_{-\infty}^{\infty} (-k^2 + ik + 2)c_k e^{ikt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2it} + e^{-2it}\right].
$$

Vi erhåller

$$
(-k^2 + ik + 2)c_k = 0 \quad \text{för } k \neq 0, \pm 2
$$

vilket ger $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$ eftersom $-k^2 + ik + 2 = 0$ ger $k = 0$ och $k^2 = 2$, vilket är en motsögelse. Således är $c_k = 0$ för $k \neq 0, \pm 2$.

För $k = 0$ har vi $c_0 = 1/4$ och för $k = \pm 2$ har vi

$$(-2 + 2i)c_2 = -\frac{1}{4}, \quad -(2 + 2i)c_{-2} = -\frac{1}{4}$$

vilket ger

$$c_2 = \frac{1 + i}{16}, \quad c_{-2} = \frac{1 - i}{16}$$

och då får vi (efter lite arbete)

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\left[\cos 2t - \sin 2t\right].$$

6) Med

$$f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}, \quad g(t) = \frac{t}{(1 + t^2)^2}$$

har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{(1 + t^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

och enligt Plancherels sats har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\, d\omega.$$

Observera att

$$g(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{1 + t^2}$$

vilket ger

$$G(\omega) = \frac{-i\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}.$$

Vidare är

$$F(\omega) = -i\pi \operatorname{sgn} \omega, \ \ |\omega| < 2, \quad F(\omega) = 0, \ |\omega| > 2.$$

Vi erhåller nu

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2t}{(1+t^2)^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}\, d\omega \\
&= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} \omega \operatorname{sgn} \omega\, e^{-|\omega|}\, d\omega \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{0}^{2} \omega e^{-\omega}\, d\omega \\
&= \frac{\pi(1-3e^{-2})}{2}.
\end{aligned}$$

Observera att $\omega \operatorname{sgn} \omega$ är en jämn funktion.

7) Serien är

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

med $u_k(x) = \dfrac{x}{(k^2+x)^2}$. Vi har

$$|u_k(x)| \le \frac{|x|}{(k^2+x)^2} \le \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{(k^2+x)^2} \le \frac{1}{(k^2+x)^{3/2}} \le 1/k^3$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ och serien $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} 1/k^3$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent och därmed punktvis konvergent på $\mathbb{R}$. Vidare har vi att att

$$u_k'(x) = \frac{k^2-3x^2}{(k^2+x^2)^3}$$

och

$$|u_k'(x)| \leq \frac{k^2+3x^2}{(k^2+x)^3} \leq \frac{\sqrt{3(k^2+x^2)}}{(k^2+x)^3} = \frac{3}{(k^2+x^2)^2} \leq 1/k^4$$

för alla $x \in \mathbb{R}$ och serien $\displaystyle\sum_1^{\infty} 1/k^4$ konvergerar. Enligt Weierstrass' Majorantsats är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. Funktionerna $u_k'(x)$ är kontinuerliga på $\mathbb{R}$ och då är $f(x)$ en kontinuerligt deriverbar funktion med

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(k).$$