

TATA 57/TATA80 Transformteori. 2016.06.03, kl. 14-19. TEN 1.

Inga hjälpmedel tillåtna förutom tabellerna *Transformteori. Sammanfattning, Formler & Lexikon* (ni får använda era egna exemplar). Varje uppgift ger 0-3 poäng. En godkänd uppgift är den som bedöms med minst 2 poäng. Betyg N , med $N = 3, 4, 5$, fås med $3N - 1$ poäng samt N godkända uppgifter. Lösningar till tentamen ska finnas på kursens hemsida efter tentamens slut.

1) Lös differensekvationen

$$y(k+2) + y(k) = 2^k$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$, där $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.

2) Lös ekvationen

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{-t} \cos t$$

för $t \geq 0$ och med $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3) Funktionen $f(t)$ har period 2π och definieras som $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ \sin t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$.

Beräkna $f(t)$'s fourierserie och beräkna sedan värdet på serierna

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}$$

Motivera noga.

4) Finn alla lösningar $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = te^{-t}\chi(t).$$

5) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som har period 2π och uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = \sin^2 t$$

Motivera noga.

6) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{(1 + t^2)^2} dt.$$

7) Visa att serien $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(k^2 + x^2)^2}$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion för alla $x \in \mathbb{R}$. Motivera noga.