Inledande matematisk analys

1.

Lotta och Erik spelar ett tärningsspel. De turas om att kasta en sexsidig tärning och summerar alla siffrorna de får. Man slutar spela när en spelare får en siffra som leder till en summa som inte är ett primtal. Den spelare som kastade tärningen sist vinner.

Till exempel, i ett spel började Lotta och fick en femma, sen fick Erik en sexa, sen fick Lotta en tvåa, och sist fick Erik en trea. Benämn summan efter k kast S_k. Eftersom $S_1 = 5$, $S_2 = 5 + 6 = 11$ och $S_3 = 5 + 6 + 2 = 13$ är primtal, medan $S_4 = 5 + 6 + 2 + 3 = 16$ är inte ett primtal var spelet slut efter fyra kast och Erik vann.

Här är en lista över de första 40 primtal.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173

Finns det en övre begränsning för hur stor summan S_k kan vara eller inte? Motivera ditt svar.

Solution: Ja. Summan kan öka högst 6 i varje tärningskast, så för att S_k ska vara lika med N utan att spelat har slutat krävs att det finns minst ett primtal i varje mängd $\{n-5, n-4, n-3, n-2, n-1, n\}$ av 6 konsekutiva heltal för varje $n \leq N$. Men det finns inget primtal i mängden $\{90, 91, 92, 93, 94, 95\}$, så spelet måste sluta med $S_k \leq 95$.

---

2. Räkna ut

$$\sum_{n=4}^{30} (4n + 5).$$

Solution:

Vi räknar

$$\sum_{n=4}^{30} (4n+5) = \sum_{n=1}^{27} (4(n+3)+5) = \sum_{n=1}^{27} (4n+17) = 4\left(\sum_{n=1}^{27} n\right) + 17 \times 27$$
$$= 4\left(\frac{27 \times 28}{2}\right) + 17 \times 27 = 1512 + 459 = 1971.$$

3.

Vissa att funktionen $f\colon (-\infty, 4] \to [-4, \infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) := x^2 - 8x + 12 \quad \text{för alla } x \in (-\infty, 4]$$

är bijektiv. Ge inversen till f.

Solution:

För varje $y \in [-4, \infty)$ vill vi visa att det finns precis en lösning $x \in (-\infty, 4]$ till ekvationen $y = f(x)$.

Vi räknar

$$y = f(x) \iff y = x^2 - 8x + 12 \iff y = (x-4)^2 - 4 \iff y + 4 = (x-4)^2.$$

Eftersom $y \in [-4, \infty)$ kan vi ta roten ur både sidor och får $\pm\sqrt{y+4} = x - 4$. Därför är $x = 4 \pm \sqrt{y+4}$ och vi har hittat två kandidater till en lösningar (och bara en i fallet $y = -4$). Däremot är bara en av de två, det vill säga $x = 4 - \sqrt{y+4}$ i intervallet $(-\infty, 4]$, så f är injektiv.

Funktionen f är även surjektiv, eftersom

$$f(4 - \sqrt{y+4}) = (4 - \sqrt{y+4})^2 - 8(4 - \sqrt{y+4}) + 12 = y$$

för varje $y \in [-4, \infty)$. Därmed är f bijektiv.

Inversen ges av formeln $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x+4}$ för alla $y \in [-4, \infty)$.

---

4. Bevisa Bernoullis olikhet. Det vill säga, bevisa att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

för alla $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Använd den för att visa

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

Solution:

Se sats F.1 och sats F.4.

---

5. Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$\sqrt{3} = 2 - 4\sin^2\theta.$$

Solution: Vi räknar

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3} = 2 - 4\sin^2\theta \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dubbla vinklar formler}}}{\iff} \; &\sqrt{3} = 2 - 2(1 - \cos(2\theta)) \\
\iff \; &\sqrt{3} = 2\cos(2\theta) \\
\iff \; &2\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{for } k \in \mathbf{Z}. \\
\iff \; &\theta = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{for } k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

6.

Avgör med bevis om funktionen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$g(x) = 4e^x - e^{-x}$$

är inverterbar eller inte.

Solution:

Vi räknar

$$\begin{aligned} &y = 4e^x - e^{-x} \\ &\iff 0 = 4e^{2x} - ye^x - 1 \\ &\iff 0 = \left(2e^x - \frac{y}{4}\right)^2 - 1 - \frac{y^2}{16} \\ &\iff 1 + \frac{y^2}{16} = \left(2e^x - \frac{y}{4}\right)^2 \\ &\iff \pm\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} = 2e^x - \frac{y}{4} \\ &\iff e^x = \frac{y}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}. \end{aligned}$$

Eftersom e^x är altid positivt och $\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}} > \frac{y}{4}$ är

$$e^x = \frac{y}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}$$

den ända möjligheten. Därför är $y = 4e^x - e^{-x}$ om och endast om

$$x = \ln\left(\frac{y}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}\right),$$

och därmed är g inverterbar.

7.

(a) För ett komplext tal z definiera *absolutbeloppet* $|z|$ och *konjugatet* $\overline{z}$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ som lyder ekvationen $|z-2| = |z-2i| = \sqrt{10}$.

Solution:

(a) För ett komplext tal $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$ är *absolutbellopet* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ och *konjugatet* $\overline{z} = x - iy$.

(b) För $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbf{R}$ kan vi skriva om första likheten till $(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2$ som är ekvivalent med $x = y$. Med hjälp av detta kan andra likheten skrivas om till $10 = x^2 + (y-2)^2 = x^2 + (x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$ som har lösningar $x = y = -1$ och $x = y = 3$. Lösningarna är då $z = -1 - i$ och $z = 3 + 3i$.