**Instruktioner:** Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) Lotta och Erik spelar ett tärningsspel. De turas om att kasta en sexsidig tärning och summerar alla siffrorna de får. Man slutar spela när en spelare får en siffra som leder till en summa som inte är ett primtal. Den spelare som kastade tärningen sist vinner.

Till exempel, i ett spel började Lotta och fick en femma, sen fick Erik en sexa, sen fick Lotta en tvåa, och sist fick Erik en trea. Benämn summan efter $k$ kast $S_k$. Eftersom $S_1 = 5$, $S_2 = 5 + 6 = 11$ och $S_3 = 5 + 6 + 2 = 13$ är primtal, medan $S_4 = 5 + 6 + 2 + 3 = 16$ är inte ett primtal var spelet slut efter fyra kast och Erik vann.

Här är en lista över de första 40 primtal.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
| 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 |
| 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 | 107 | 109 | 113 |
| 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 |

Finns det en övre begränsning för hur stor summan $S_k$ kan vara eller inte? Motivera ditt svar.

(2) Räkna ut

$$\sum_{n=4}^{30}(4n+5).$$

(3) Vissa att funktionen $f\colon (-\infty, 4] \to [-4, \infty)$ definierad enligt formeln

$$f(x) := x^2 - 8x + 12 \quad \text{för alla } x \in (-\infty, 4]$$

är bijektiv. Ge inversen till $f$.

(4) Bevisa Bernoullis olikhet. Det vill säga, bevisa att

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

för alla $x \geq -1$ och $n \in \mathbf{Z}_+$. Använd den för att visa

$$\exp(x) \geq 1 + x$$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

(5) Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$\sqrt{3} = 2 - 4\sin^2\theta.$$

(6) Avgör med bevis om funktionen $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierad enligt formeln

$$g(x) = 4e^x - e^{-x}$$

är inverterbar eller inte.

(7) (a) För ett komplext tal $z$ definiera *absolutbeloppet* $|z|$ och *konjugatet* $\overline{z}$.

(b) Hitta alla $z \in \mathbf{C}$ som lyder ekvationen $|z-2| = |z-2i| = \sqrt{10}$.