Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Det finns sju uppgifter och varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. För godkänt betyg räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget. Lösningarna skall vara välmotiverade och ordentligt skrivna. Inga hälpmedel tillåtna. Lycka till!

(1) (a) Visa att $4n < 2^n$ för alla $n \in \mathbf{N}$ så att $n \geq 5$.

(b) Varför funkar inte ditt bevis av (a) om man betraktar $n < 5$?

(2) Visa att $9^n - 2^n$ är jämnt delbart med 7 för alla $n \in \mathbf{N}$. (Det sägs att $m \in \mathbf{N}$ är *jämnt delbart* med $k \in \mathbf{N}$ om $m/k \in \mathbf{N}$.)

(3) (a) Använd

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

för alla $\theta, \varphi \in \mathbf{R}$ för att visa

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

för alla $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Hitta alla $\theta \in \mathbf{R}$ sådana att $1 + \cos(2\theta) + 3\sin\theta = 0$.

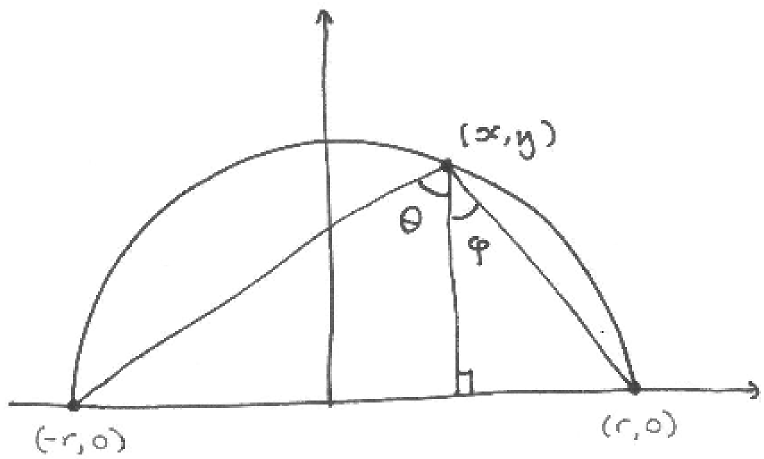
(4) (a) Definiera a^x för $a > 0$ och $x \in \mathbf{R}$.

(b) Visa att definitionen av a^x från (a) stämmer överens med definitionen då x är ett heltal i fallet $x = 3$. Det vill säga kontrollera att $a^3 = aaa$ enligt definitionen du skrev i (a).

(5) Bevisa Bernoullis olikhet: För alla reella tal $x \geq -1$ och alla $n \in \mathbf{N}$ får man att

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(6) (a) Betrakta en punkt (x, y) i planet som ligger på en cirkel med radien $r > 0$ och medel punkt i origo. Det innebär då att $x^2 + y^2 = r^2$. Låt $y > 0$, och θ och φ vara vinklarna i bilden nedan. Visa att $\cos(\theta + \varphi) = 0$ för alla (x, y).



(7) (a) Definiera $e^{i\theta}$ för $\theta \in \mathbf{R}$.

(b) Bevisa att

$$\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

för alla reella tal x och y. Endast definitioner och trigonometriska räknelagar får användas utan att de först bevisas.