Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2019-01-08 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Till uppgift 1 och 2 ska **endast svar** ges, på ett gemensamt papper. Till uppgift 3–7 ska fullständiga och välmotiverade lösningar ges, avslutade med ett svar där så är lämpligt.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Lämna endast in svar!

1. Låt y vara den lösning till ekvationen $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 12 - 6\cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 6$ och $y(1) = -6$. Ange

   (a) $(\mathscr{Z}_+ y)(z)$, (b) $y(n)$.

2. Ange en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sådan att $\hat{u}(s) = \dfrac{s^3 - 13s}{s^2 - 4s + 3}$, $1 < \operatorname{Re} s < 3$.

3. Bestäm en π-periodisk lösning u till ekvationen $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi u(t-r)\,r\,dr = \cos^2 t$, $t \in \mathbb{R}$.

4. (a) Bestäm andraderivatan i distributionsmening av funktionen $\sin|t|$. (1p)

   (b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $tu' = \delta$. (1p)

   (c) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Visa att $u'(t)$ har laplacetransformen $s\hat{u}(s)$. (1p)

5. Använd laplacetransform för att bestämma alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen
$$y'(t) - y(t) = \delta'(t) - \chi(-t).$$

6. Sätt $u_n(t) = e^{t^2/2}(e^{-t^2})^{(n)}$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{N}$, där $(e^{-t^2})^{(n)}$ betecknar derivatan av ordning n av e^{-t^2}. Visa att $\mathscr{F}u_n = \sqrt{2\pi}(-i)^n u_n$.

7. Bestäm värdet av $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\,\frac{1-e^{-i\omega/2}}{i\omega/2}\cdots\frac{1-e^{-i\omega/2^n}}{i\omega/2^n}\,e^{2i\omega}\,d\omega$ för alla $n \ge 1$.

Lycka till!