Lösningar, TATA77, 2018-10-24

1. $y''(t) - 6y'(t) + 10y(t) = 2e^{2t}, \ t \geq 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 1.$

Enkelsidig laplacetransform ger ($Y = \mathcal{L}_+ y$):

$$s^2Y(s) - 2s - 1 - 6(sY(s) - 2) + 10Y(s) = \frac{2}{s-2},$$

$$(s^2-6s+10)Y(s) = \frac{2}{s-2} + 2s - 11 = \frac{2s^2-15s+24}{s-2}, \text{ så}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2-15s+24}{(s^2-6s+10)(s-2)} = \frac{s-7}{s^2-6s+10} + \frac{1}{s-2} =$$

$$= \frac{s-3-4}{(s-3)^2+1} + \frac{1}{s-2}, \quad \operatorname{Re} s > 3.$$

Tabell och regeln $e^{ct}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{u}(s-c)$ ger $y(t)$.

Svar: a) $\dfrac{2s^2-15s+24}{(s^2-6s+10)(s-2)}, \ \operatorname{Re} s > 3.$

b) $e^{3t}(\cos t - 4\sin t) + e^{2t}, \ t \geq 0.$

2. $u(t) - \int_0^\infty u(t-r)e^{-3r}\,dr = 3e^t\chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$

Integralen är $(u*f)(t)$, där $f(t) = e^{-3t}\chi(t)$, så fouriertransform ger $\hat{u}(\omega) - \hat{u}(\omega)\dfrac{1}{3+i\omega} = \dfrac{3}{1-i\omega},$

$$\frac{3+i\omega-1}{3+i\omega}\hat{u}(\omega) = \frac{3}{1-i\omega}, \quad \hat{u}(\omega) = \frac{3(3+i\omega)}{(1-i\omega)(2+i\omega)} = \frac{4}{1-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega}.$$

Inverstransform med tabell ger $4e^t\chi(-t) + e^{-2t}\chi(t)$.

En lösning u måste vara vänsterkontinuerlig i $t=0$, eftersom högerledet är det och faltningen är kontinuerlig, vilket ger:

Svar: $u(t) = \begin{cases} 4e^t, & t \leq 0, \\ e^{-2t}, & t > 0. \end{cases}$

3. a) $\langle (\sin t)\delta'', \varphi\rangle = \langle \delta'', (\sin t)\varphi\rangle = (-1)^2\langle \delta, ((\sin t)\varphi(t))''\rangle =$

$= \langle \delta, (\sin t)\varphi''(t) + 2(\cos t)\varphi'(t) - (\sin t)\varphi(t)\rangle =$

$= 2\varphi'(0) = \langle -2\delta', \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$

<u>Svar:</u> $-2\delta'$.

b) $(t-2)u = t^2 + 6\delta, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$

$\frac{t^2}{t-2} = t+2+\frac{4}{t-2}, \quad t \neq 2,$ så $(t-2)(t+2+4\underline{(t-2)}^{-1}) = t^2.$

$(t-2)\delta = -2\delta$, så $(t-2)(-3\delta) = 6\delta$. Alltså har vi

$(t-2)u = (t-2)(t+2+4\underline{(t-2)}^{-1} - 3\delta)$, vilket ger:

<u>Svar:</u> $u = t+2+4\underline{(t-2)}^{-1} - 3\delta + C\delta_2, \quad C \in \mathbb{C}.$

4. $u(t) = e^{i(a+1)t}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}, \quad T = \pi \Rightarrow \Omega = 2,$ a ej udda heltal.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i(a+1)t} e^{-in2t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{i(a+1-2n)t}}{i(a+1-2n)}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{e^{i\pi a/2}e^{i\pi/2}e^{-in\pi} - e^{-i\pi a/2}e^{-i\pi/2}e^{in\pi}}{i\pi(a+1-2n)} =$$

$$= \frac{(-1)^n i(e^{i\pi a/2} + e^{-i\pi a/2})}{i\pi(a+1-2n)} = \frac{(-1)^n 2\cos\frac{\pi a}{2}}{\pi(a+1-2n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Delsvar:</u> u:s f.s. är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\cos\frac{\pi a}{2}}{\pi(a+1-2n)} e^{i2nt}$.

Satsen om punktvis konvergens ger (ty u deriverbar i t=0):

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n 2\cos\frac{\pi a}{2}}{\pi(a+1-2n)} e^{i2n\cdot 0} = e^{i(a+1)\cdot 0},$$ så

$$\frac{\pi}{\cos(\pi a/2)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} \frac{2(-1)^n}{a+1-2n}.$$

5. $y(n+2) + y(n) = 5\cdot 2^{-n}\chi(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

$2^n\chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z-2}$, $|z|>2$, så $2^{-n}\chi(-n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{1/z}{1/z-2}$, $|\frac{1}{z}|>2$

Z-transform ger: $z^2\hat{y}(z) + \hat{y}(z) = \dfrac{5}{1-2z}$, $|z| \in R_y \cap \,]0, \frac{1}{2}[$.

Alltså är $\hat{y}(z) = \dfrac{5}{(z^2+1)(1-2z)} = \dfrac{2z+1}{z^2+1} + \dfrac{4}{1-2z}$, med

$R_y = \,]0,\frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2},1[$ eller $]1,\infty[$. Enbart $]0,\frac{1}{2}[$ ger en lösning.

Ur tabell: $(\cos\frac{n\pi}{2})\chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z^2}{z^2+1}$, $|z|>1$

$(\cos\frac{-n\pi}{2})\chi(-n)$ $\quad \dfrac{1/z^2}{1/z^2+1}$, $|\frac{1}{z}|>1$, dvs $\dfrac{1}{1+z^2}$, $0<|z|<1$

$(\sin\frac{n\pi}{2})\chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z^2+1}$, $|z|>1$

$(\sin\frac{-n\pi}{2})\chi(-n)$ $\quad \dfrac{1/z}{1/z^2+1}$, $|\frac{1}{z}|>1$, dvs $\dfrac{z}{1+z^2}$, $0<|z|<1$.

Av detta får vi:

<u>Svar:</u> $y(n) = \left(\cos\frac{n\pi}{2} - 2\sin\frac{n\pi}{2} + 4\cdot 2^{-n}\right)\chi(-n)$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. $\hat{u} = \lambda u$, $0 \neq u \in S'$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Det följer att $\hat{\hat{u}} = \widehat{\lambda u} = \lambda\hat{u} = \lambda^2 u$. Enligt Fouriers inversionsformel är $\hat{\hat{u}} = 2\pi\check{u}$, så: $2\pi\check{u} = \lambda^2 u$.

Nu fås $(2\pi)^2 u = (2\pi)^2\check{\check{u}} = 2\pi(\lambda^2 u)^\vee = \lambda^4 u$, vilket ger att $(2\pi)^2 = \lambda^4$ (eftersom $u \neq 0$).

Möjliga värden på λ är alltså $\underline{\pm\sqrt{2\pi},\ \pm i\sqrt{2\pi}}$.

Om $\lambda^2 = 2\pi$ fås $2\pi\check{u} = 2\pi u$, dvs u är jämn, och
om $\lambda^2 = -2\pi$ fås $2\pi\check{u} = -2\pi u$, dvs u är udda.

($e^{-t^2/2}$ har $\lambda = \sqrt{2\pi}$,
$te^{-t^2/2}$ har $\lambda = -i\sqrt{2\pi}$,
$(2t^2-1)e^{-t^2/2}$ har $\lambda = -\sqrt{2\pi}$,
$(2t^3-3t)e^{-t^2/2}$ har $\lambda = i\sqrt{2\pi}$,
... För varje möjligt λ-värde finns (många) u s.a. $\hat{u} = \lambda u$.)

7. $u(t) = \dfrac{1}{\cosh t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}}$, $t \in \mathbb{R}$.

För $t > 0$ är $u(t) = \dfrac{2}{e^t(1+e^{-2t})} = \dfrac{2}{e^t}(1 - e^{-2t} + e^{-4t} - \dots) =$

$= 2(e^{-t} - e^{-3t} + e^{-5t} - \dots)$, och för $t < 0$ är

$u(t) = \dfrac{2}{e^{-t}(1+e^{2t})} = 2(e^t - e^{3t} + e^{5t} - \dots)$.

$$\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} 2(e^t - e^{3t} + \dots)e^{-st}\,dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} 2(e^{-t} - e^{-3t} + \dots)e^{-st}\,dt = /\, s \neq \pm 1, \pm 3, \dots /$$

$$= 2\left[\frac{e^{(1-s)t}}{1-s} - \frac{e^{(3-s)t}}{3-s} + \dots\right]_{-\infty}^{0} + 2\left[-\frac{e^{-(1+s)t}}{1+s} + \frac{e^{-(3+s)t}}{3+s} - \dots\right]_0^{\infty} =$$

$-1 < \operatorname{Re} s < 1$

$$= 2\left(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3} - \dots\right) + 2\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} + \dots\right), \quad |\operatorname{Re} s| < 1.$$

Om $s \in \mathbb{R}$ och $-1 < s < 1$ ger detta och formeln i uppgift 4 att $\hat{u}(s) = \dfrac{\pi}{\cos(\pi s/2)}$. Entydighetssatsen för analytiska funktioner ger nu:

<u>Svar:</u> $\hat{u}(s) = \dfrac{\pi}{\cos(\pi s/2)}$, $|\operatorname{Re} s| < 1$.

($\hat{u}$ kan också bestämmas med residykalkyl.)