Lösningar, TATA77, 2018-01-03

1. $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 3, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Enkelsidig laplacetransform ger ($Y = \mathcal{L}_+ y$):

$$s^2 Y(s) - 0s - 1 - 2(sY(s) - 0) + 3Y(s) = \frac{3}{s},$$

$$(s^2 - 2s + 3)Y(s) = \frac{3}{s} + 1 = \frac{3+s}{s}, \quad \text{så}$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s^2-2s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{-s+3}{s^2-2s+3} = \frac{1}{s} + \frac{-(s-1)+2}{(s-1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s-1}{(s-1)^2 + \sqrt{2}^2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{(s-1)^2+\sqrt{2}^2}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Tabell och regeln $e^{ct}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{u}(s-c)$ ger:

<u>Svar:</u> $y(t) = 1 - e^t \cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}e^t \sin\sqrt{2}t, \quad t \geq 0.$

2. $u(t) = e^{it}$ då $0 \leq t < \pi$, $u(t) = 0$ då $\pi \leq t < 2\pi$, $T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 1.$

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{it}e^{-int}\,dt \overset{n \neq 1}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{e^{i(1-n)\pi} - 1}{2\pi i(1-n)} = \frac{1+(-1)^n}{2\pi i(n-1)}, \quad n \neq 1.$$

$$\hat{u}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{it}e^{-it}\,dt = \frac{1}{2}, \quad \text{så:}$$

<u>Delsvar:</u> u:s f.s. är $\frac{1}{2}e^{it} + \sum_{n \neq 1} \frac{1+(-1)^n}{2\pi i(n-1)} e^{int}.$

u har gen. höger- och vänsterderivata i $t = 0$, så satsen om punktvis konvergens ger att u:s f.s. i $t = 0$ har summan $\frac{u(0+)+u(0-)}{2} = \frac{e^{i0} + u(2\pi-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$

3\. a) $((3t+1)|t|)'' = ((3t+1)\,\mathrm{sgn}\,t + 3|t|)' =$

$= (3t+1)\cdot 2\delta + 3\,\mathrm{sgn}\,t + 3\,\mathrm{sgn}\,t$, så:

Svar: $2\delta + 6\,\mathrm{sgn}\,t$.

b) $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$, så $t \xrightarrow{\mathcal{F}} i(2\pi\delta(\omega))' = 2\pi i\,\delta'(\omega)$.

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ så regeln $e^{iat}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega - a)$ ger

att $\mathcal{F}(t\sin t)$ är: Svar: $\pi\delta'(\omega-1) - \pi\delta'(\omega+1)$.

c) $u \in S'$. Låt $\varphi \in S$.

$\langle (u'(t))^{\wedge}(\omega), \varphi(\omega)\rangle = \langle u'(t), \hat{\varphi}(t)\rangle = -\langle u(t), \hat{\varphi}'(t)\rangle =$

$/\ \hat{\varphi}'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)(-i\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = (-i\omega\varphi(\omega))^{\wedge}(t)\ /$

$= -\langle u(t), (-i\omega\varphi(\omega))^{\wedge}(t)\rangle = \langle \hat{u}(\omega), i\omega\varphi(\omega)\rangle = \langle i\omega\hat{u}(\omega), \varphi(\omega)\rangle$,

så $u'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega\hat{u}(\omega)$.

4\. $y = Sx$ ger att $y'' + y' - 6y = x''$, så h uppfyller $h'' + h' - 6h = \delta''$.

Laplacetransform ger: $(s^2+s-6)\hat{h} = s^2$, och $s^2+s-6 = (s-2)(s+3)$,

så $\hat{h} = \left(\frac{s^2}{(s-2)(s+3)},\ \mathrm{Re}\,s > 2\right)_{\mathcal{H}'} + 2\pi C\delta_2 + 2\pi D\delta_{-3}$.

$\frac{s^2}{(s-2)(s+3)} = 1 + \frac{4/5}{s-2} - \frac{9/5}{s+3}$, så alla impulssvar ges av

$$h = \delta + \frac{4}{5}e^{2t}\chi(t) - \frac{9}{5}e^{-3t}\chi(t) + Ce^{2t} + De^{-3t},\quad C, D \in \mathbb{C}.$$

$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ ger att $C = -\frac{4}{5}$, $\lim_{t\to-\infty} h(t) = 0$ ger att $D = 0$.

Svar: $h = \delta - \frac{4}{5}e^{2t}\chi(-t) - \frac{9}{5}e^{-3t}\chi(t)$

5. $\displaystyle u(n) - \sum_{k=-\infty}^{n} 3^{n-k} u(k) = 4^n \chi(-n-1)\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Summan är faltningen $(f*u)(n)$, där $f(n) = 3^n \chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vi har $\chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z-1}$, $|z| > 1$

$\chi(-n) \qquad \dfrac{1/z}{1/z - 1}$, $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$, dvs $\dfrac{1}{1-z}$, $0 < |z| < 1$

$\chi(-n-1) \qquad \dfrac{z}{1-z}$, $0<|z|<1$ $\quad$ (ty $\chi(-n-1) = \chi(-(n+1))$)

$4^n \chi(-n-1) \qquad \dfrac{z/4}{1-z/4}$, $0 < \left|\frac{z}{4}\right| < 1$, dvs $-\dfrac{z}{z-4}$, $0 < |z| < 4$.

$\mathcal{Z}(VL) = \mathcal{Z}(HL)$ ger: $\quad \hat{u}(z) - \dfrac{z}{z-3}\hat{u}(z) = -\dfrac{z}{z-4}$, $\quad |z| \in R_u \cap \,]3,4[\,$.

Så $\hat{u}(z) = \dfrac{(z-3)z}{3(z-4)} = \dfrac{(z-4+1)z}{3(z-4)} = \dfrac{z}{3} + \dfrac{z}{3(z-4)}$, och vi måste

ta $R_u = \,]0,4[\,$ för att få en lösning. Tabell och räkningarna

ovan ger: $\quad$ Svar: $u(n) = \frac{1}{3}\delta(n+1) - \frac{4^n}{3}\chi(-n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. $u(t) = \ln(1 + t^{-2})\,, \quad t \neq 0.$

Vi har $u(t) = t^{-2} + \mathcal{O}(t^{-4})$ då $|t| \to \infty$, och

$u(t) = \ln \dfrac{t^2+1}{t^2} = \ln(t^2+1) - 2\ln|t|$, så $u(t) = -2\ln|t| + \mathcal{O}(t^2)$

då $t \to 0$. Detta ger att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så $\hat{u}$ är en kont. fkn.

$u'(t) = \dfrac{2t}{t^2+1} - 2\underline{t^{-1}}$ (i distributionsmening). Tabell ger:

$i\omega\hat{u}(\omega) = -2\pi i e^{-|\omega|}\operatorname{sgn}\omega + 2\pi i \operatorname{sgn}\omega$, så vi får att

$\hat{u}(\omega) = \dfrac{2\pi(\operatorname{sgn}\omega)(1 - e^{-|\omega|})}{\omega} = \dfrac{2\pi(1-e^{-|\omega|})}{|\omega|}$ då $\omega \neq 0$.

$\hat{u}$ är en kont. funktion, och $\dfrac{2\pi(1-e^{-|\omega|})}{|\omega|} \to 2\pi$ då $\omega \to 0$,

vilket ger: $\quad$ Svar: $\hat{u}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\pi(1-e^{-|\omega|})}{|\omega|}, & \omega \neq 0, \\ 2\pi, & \omega = 0. \end{cases}$

7. Sätt $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(t-2\pi n)^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$.

Summan konvergerar likformigt på kompakta intervall (enl. Weierstrass majorantsats), så u är en 2π-periodisk, kontinuerlig funktion.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(t-2\pi m)^2+1} e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{2e^{-int}}{(t-2\pi m)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-2\pi m}^{-2\pi m+2\pi} \frac{2e^{-in(t+2\pi m)}}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-int}}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{2}{t^2+1}\right)(n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi e^{-|n|} = e^{-|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Detta ger att u:s fourierserie är absolutkonvergent. Eftersom u är kontinuerlig fås därför att

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|}e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{n(1+it)} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(-1+it)} =$$

$$= \frac{e^{-1-it}}{1-e^{-1-it}} + \frac{1}{1-e^{-1+it}} = \frac{e^{-1-it}-e^{-2}+1-e^{-1-it}}{1-e^{-1}(e^{it}+e^{-it})+e^{-2}} =$$

$$= \frac{e^2-1}{e^2-2e\cos t+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$