Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2017-10-19 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd z-transform för att bestämma en lösning y till differensekvationen
$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 6 \cdot 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
med begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y(1) = 4$.

2. (a) Förenkla distributionen $e^t \delta'(t/2)$. (1p)

   (b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $(t^2 - t)u = t - 2$. (2p)

3. Låt a vara ett reellt tal som *inte* är ett heltal, och låt u vara den 2π-periodiska funktion som ges av $u(t) = e^{iat}$ då $0 \leq t < 2\pi$. Bestäm fourierserien för u och använd resultatet för att visa att
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

4. Använd fouriertransform för att bestämma en lösning u till ekvationen
$$u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-r)} u(r)\, dr = 4e^{-2|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Använd laplacetransform för att bestämma alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen $y'(t) - 2y(t) = \delta' + e^{|t|}$.

6. Bestäm en lösning u till ekvationen $\displaystyle\int_{t-1}^{t} (1 - t + r) u(r)\, dr = t\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Visa att det finns en *kontinuerlig* funktion $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sådan att $\mathscr{F}u \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och ge ett konkret exempel på en sådan funktion.

Lycka till!