Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2017-08-24 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd fouriertransform för att bestämma en lösning till ekvationen
$$u(t) + \int_{-\infty}^{0} e^{2r} u(t-r)\,dr = 2e^t \chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Bestäm fourierserien för den funktion u som ges av $u(t) = 1 - t^2$ då $-1 \le t < 1$ och som har period 2. Använd resultatet för att beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

3. (a) Bestäm andraderivatan i distributionsmening av funktionen $e^t\chi(t)$. (1p)
   (b) Bestäm alla $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sådana att $u'' = (\sin t)\chi$. (2p)

4. Använd z-transform för att bestämma en lösning till differensekvationen
$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Låt u vara den funktion som har period 2π och som ges av $u(t) = t$ då $0 \le t < 2\pi$, och låt $N \ge 1$ vara ett heltal. Visa att
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t) - (S_N u)(t)|^2\,dt \le \frac{2}{N}.$$
($S_N u$ är den N:te symmetriska delsumman av u:s fourierserie.)

6. Låt $u(t) = n2^{-|n|}$ då $2n-1 \le t < 2n+1$, för $n \in \mathbb{Z}$. Bestäm u:s laplacetransform.

7. Låt u vara den 2π-periodiska funktion som ges av $u(t) = \pi - t$ då $0 \le t < 2\pi$. Visa att
$$\max_{t\in[0,\pi]} (S_N u)(t) \to 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{då } N \to \infty.$$

Lycka till!