Lösningar, TATA77, 2017-01-07

1. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, $y(0) = 1$, $y(1) = -2$.

Enkelsidig z-transform ger ($Y = \mathcal{Z}_+ y$):

$$z^2 Y(z) - z^2 + 2z - 5(zY(z) - z) + 6Y(z) = \frac{z}{z-3}, \text{ så}$$

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = \frac{z}{z-3} + z^2 - 7z = \frac{z^3 - 10z^2 + 22z}{z-3}, \text{ så}$$

$$Y(z) = z\,\frac{z^2 - 10z + 22}{(z-3)^2(z-2)} = z\left(\frac{1}{(z-3)^2} + \frac{-5}{z-3} + \frac{6}{z-2}\right) =$$

$$= \frac{z}{(z-3)^2} - \frac{5z}{z-3} + \frac{6z}{z-2}, \quad |z| > 3.$$

Ur tabell fås: $y(n) = \frac{1}{3} n 3^n \alpha(n) - 5 \cdot 3^n \alpha(n) + 6 \cdot 2^n \alpha(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Svar: $y(n) = (n - 15) \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Sätt $u(t) = t\alpha(t-4)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$u' = t\delta_4 + 1 \cdot \alpha(t-4) = 4\delta_4 + \alpha(t-4), \text{ så}$$

$$u'' = 4\delta_4' + \delta_4.$$

Svar: $4\delta_4' + \delta_4$.

b) $\langle (\sin t)\delta'', \varphi \rangle = \langle \delta'', \sin t \cdot \varphi(t) \rangle =$

$= -\langle \delta', \sin t \cdot \varphi'(t) + \cos t \cdot \varphi(t) \rangle =$

$= \langle \delta, \sin t \cdot \varphi''(t) + 2\cos t \cdot \varphi'(t) - \sin t \cdot \varphi(t) \rangle =$

$= 0\varphi''(0) + 2\varphi'(0) - 0\varphi(0) = \langle -2\delta', \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Svar: $-2\delta'$.

c) Derivering av $t\underline{t}^{-1} = 1$ ger att $t(\underline{t}^{-1})' + 1\underline{t}^{-1} = 0$,

men $\underline{t}^{-2} = -(\underline{t}^{-1})'$, så $-t\underline{t}^{-2} + \underline{t}^{-1} = 0$,

dvs: $t\underline{t}^{-2} = \underline{t}^{-1}$.

3. $$u(t) - \int_{-\infty}^{t} 5e^{-2(t-r)} u(r)\,dr = e^{3t}\chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Integralen $= (f * u)(t)$, där $f(t) = 5e^{-2t}\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, så

$\mathcal{F}(VL) = \mathcal{F}(HL)$ ger: $\quad \hat{u}(\omega) - \dfrac{5}{2+i\omega}\hat{u}(\omega) = \dfrac{1}{3-i\omega}$, vilket ger

$$\frac{-3+i\omega}{2+i\omega}\hat{u}(\omega) = \frac{1}{3-i\omega}, \quad \hat{u}(\omega) = -\frac{2+i\omega}{(3-i\omega)^2} = \frac{1}{3-i\omega} - \frac{5}{(3-i\omega)^2}.$$

$$e^{3t}\chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{3-i\omega}, \text{ så } te^{3t}\chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\left(\frac{1}{3-i\omega}\right)' = -\frac{1}{(3-i\omega)^2}.$$

<u>Svar:</u> $u(t) = (1+5t)e^{3t}\chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$

4. $$\hat{u}(s) = \frac{e^{-3s}(s^3 - 5s^2 + 8s)}{s^2 - 3s + 2}, \quad \operatorname{Re} s < 1.$$

$$\frac{s^3 - 5s^2 + 8s}{s^2 - 3s + 2} = s - 2 + \frac{4}{(s-2)(s-1)} = s - 2 + \frac{4}{s-2} - \frac{4}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s < 1. \ (*)$$

$\delta \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$, så $\delta' \xrightarrow{\mathcal{L}} s \cdot 1 = s$. För $a \in \mathbb{R}$ har vi:

$$e^{-at}\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re} s > -a, \text{ så}$$

$$e^{at}\chi(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{-s+a}, \quad \operatorname{Re}(-s) > -a, \text{ dvs: } -\frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s < a.$$

Inverstransformen av $(*)$ blir alltså:

$$\delta' - 2\delta - 4e^{2t}\chi(-t) + 4e^{t}\chi(-t),$$

och faktorn e^{-3s} i $\hat{u}(s)$ ger en translation: $t \mapsto t-3$,

så:

<u>Svar:</u> $u = \delta_3' - 2\delta_3 - 4(e^{2(t-3)} - e^{t-3})\chi(3-t).$

5. $y''(t) + y(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0,$

och $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi/2, \\ \sin t, & t \geq \pi/2. \end{cases}$

$f(t) = 1 + (\sin t - 1)\chi(t - \frac{\pi}{2}) = 1 + (\cos(t - \frac{\pi}{2}) - 1)\chi(t - \frac{\pi}{2}), \; t \geq 0,$

så enkelsidig laplacetransform ger ($Y = \mathcal{L}_+ y$):

$s^2 Y(s) - 1s - 0 + Y(s) = \frac{1}{s} + e^{-\pi s/2}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right), \quad \Big/ \frac{1}{s} + s = \frac{s^2+1}{s} \Big/$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + e^{-\pi s/2}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{(s^2+1)s}\right) =$$

$$= \frac{1}{s} + e^{-\pi s/2}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Tabell ger: $y(t) = \chi(t) + \left[\left(\frac{t}{2}\sin t + \cos t - 1\right)\chi(t)\right]_{t \mapsto t - \pi/2}.$

<u>Svar</u>: $y(t) = 1 + \left(-\frac{t - \pi/2}{2}\cos t + \sin t - 1\right)\chi(t - \pi/2), \; t \geq 0.$

6. Sätt $I = \int_{-\pi}^{\pi} |e^t - s(t)|^2 \, dt$, där $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$.

Låt $u(t) = e^t$, $|t| < \pi$, $u(\pi) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$, och låt u ha period 2π.

Då är $I = 2\pi \|u - s\|_{2,T}^2$, där $T = 2\pi$ (så $\Omega = 1$).

Om $c(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ och a_n och b_n väljs som u:s fourierkoeff. på reell form ger satsen om punktvis konvergens att $u(t) = c(t) + s(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Eftersom $c(t) \perp \sin nt$ i $\mathcal{L}_T^2$ ($n \geq 1$) minimeras I genom detta val av b_n. Alltså:

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} \, dt = \ldots = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{2\pi(1 - in)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

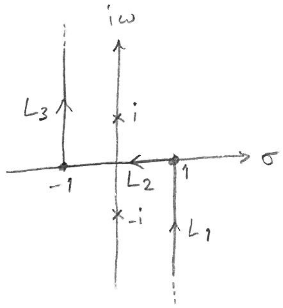
och $b_n = i(\hat{u}(n) - \hat{u}(-n))$ ger: <u>Delsvar</u>: $b_n = \frac{(-1)^{n+1}(e^\pi - e^{-\pi})n}{\pi(n^2+1)}, \; n \geq 1.$

I:s minsta värde är alltså $2\pi \|c\|_{2,T}^2$, och c är den jämna delen av u, dvs $c(t) = (u(t) + u(-t))/2$, så:

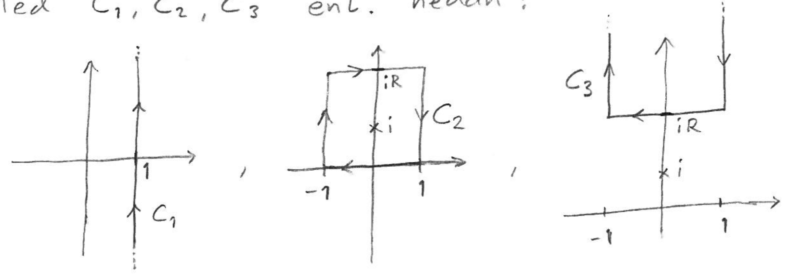
$$I_{min} = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right|^2 dt = \ldots = \underline{\underline{\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4} + \pi}}.$$

7.

$$\langle v, \psi \rangle = \int_{L_1 + L_2 + L_3} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i}, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$



Med C_1, C_2, C_3 enl. nedan:



har vi $\langle v, \psi \rangle = \int_{C_1 + C_2 + C_3} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i}$, $\psi \in \mathcal{H}$.

$$\int_{C_1} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i} = \left\langle \left(\frac{1}{s^2+1}, \operatorname{Re} s > 0 \right)_{\mathcal{H}'}, \psi \right\rangle,$$ och om $R > 1$ är

$$\int_{C_2} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{s=i} \frac{\psi(s)}{(s^2+1)i} = -2\pi \left. \frac{\psi(s)}{2s} \right|_{s=i} = -\frac{\pi}{i} \psi(i).$$

$\int_{C_3} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i}$ är oberoende av R (då $R > 1$), och $\to 0$ då $R \to \infty$ (ty ψ är begränsad på C_3), så $\int_{C_3} \frac{\psi(s)}{s^2+1} \frac{ds}{i} = 0$.

Alltså: $v = \left(\frac{1}{s^2+1}, \operatorname{Re} s > 0 \right)_{\mathcal{H}'} - \frac{\pi}{i} \delta_i$, vilket ger att

$$\mathcal{L}^{-1} v = (\sin t)\alpha(t) - \frac{1}{2i} e^{it} = \left(\frac{1}{2i} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{-it} \right) \alpha(t) - \frac{1}{2i} e^{it},$$

så:

<u>Svar:</u> $-\frac{1}{2i} e^{-i|t|}$.