Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2017-01-07 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd z-transform för att lösa differensekvationen
$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 3^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y(1) = -2$.

2. (a) Bestäm andraderivatan i distributionsmening av funktionen $t\chi(t-4)$. (1p)
   (b) Förenkla distributionen $(\sin t)\delta''$. (1p)
   (c) Visa att $t\underline{t}^{-2} = \underline{t}^{-1}$. (Att $t\underline{t}^{-1} = 1$ behöver ej visas.) (1p)

3. Bestäm en lösning u till ekvationen $u(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} 5e^{-2(t-r)}u(r)\,dr = e^{3t}\chi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Bestäm den distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som har laplacetransform
$$\hat{u}(s) = \frac{e^{-3s}(s^3 - 5s^2 + 8s)}{s^2 - 3s + 2}, \quad \operatorname{Re} s < 1.$$

5. Låt $f(t) = 1$ då $0 \le t < \pi/2$ och $f(t) = \sin t$ då $t \ge \pi/2$. Använd laplacetransform för att bestämma den lösning till differentialekvationen $y''(t) + y(t) = f(t)$, $t \ge 0$, som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

6. Betrakta integralen $\int_{-\pi}^{\pi} |e^t - s(t)|^2\,dt$, där $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$. Beräkna dels de värden på koefficienterna b_n som minimerar integralens värde (1p), dels integralens minsta värde (2p).

7. Låt v vara den analytiska distribution som ges av
$$\langle v, \psi \rangle = \int_{L_1+L_2+L_3} \frac{\psi(s)}{s^2+1}\,\frac{ds}{i}, \quad \psi \in \mathcal{H},$$
där L_1 är strålen $s = 1 + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till 0, L_2 är sträckan $s = \sigma$ då σ går från 1 till -1, och L_3 är strålen $s = -1 + i\omega$ då ω går från 0 till ∞. Bestäm den inversa laplacetransformen av v.

Lycka till!