Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

# Tentamen i Fourieranalys, TATA77

**2016-10-28 kl 8.00–13.00**

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd laplacetransform för att lösa differentialekvationen
$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2e^t \cos 2t, \quad t \geq 0,$$
med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2. Antag att $u(t) = t$ då $0 \leq t < 2\pi$ och att $u$ har period $2\pi$.
   (a) Bestäm $u$:s fourierserie. (1p)
   (b) Rita grafen för $u$:s fourierseries summa, åtminstone för $-\pi < t < 3\pi$. (1p)
   (c) Använd resultatet i (a) för att beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. (1p)

3. (a) Antag att $u \in \mathcal{L}_T^1$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen $u(t-a)$ har fourierkoefficienterna $e^{-in\Omega a}\hat{u}(n)$. (1p)
   (b) Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $u$ är begränsad. Visa att funktionen $(u * v)(t)$ har fouriertransformen $\hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega)$. (Att $u * v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ behöver ej visas.) (1p)
   (c) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $a > 0$. Visa att distributionen $u(at)$ har laplacetransformen $\hat{u}(s/a)/a$. (1p)

4. Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $(t^2 - 2t)u = 6\delta + 2$.

5. Bestäm en lösning $u$ till ekvationen $u(n) + \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} 2^{n-k} u(k) = \chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n + 1}$.

7. Låt $u(t) = \ln|t|$, $t \neq 0$. Bestäm $u$:s fouriertransform i distributionsmening.

**Lycka till!**