Lösningar, TATA77, 2016-01-08

1. $u(t) = te^{it}$, $0 \le t < 2\pi$, $T = 2\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi/T = 1$.

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{it}e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{i(1-n)t}\,dt = /\text{om } n \neq 1/$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[t\,\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} - 1\cdot\frac{e^{i(1-n)t}}{i^2(1-n)^2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\,\frac{1}{i(1-n)} - \cancel{\frac{1}{i^2(1-n)^2}} - 0 + \cancel{\frac{1}{i^2(1-n)^2}}\right) = \frac{i}{n-1}, \quad n \neq 1.$$

$$\hat{u}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{it}e^{-it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi, \text{ så:}$$

Delsvar: Fourierserien är $\pi e^{it} + \sum_{n\neq 1} \frac{i}{n-1}e^{int}$.

u har generaliserad höger- och vänsterderivata i $t=0$, så satsen om punktvis konvergens ger att fourierseriens summa i $t=0$ är $\frac{u(0+)+u(0-)}{2} = \frac{0+u(2\pi-)}{2} = \frac{2\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$.

2. $y''(t) - 3y(t) = 2\delta''(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Fouriertransform ger:

$(i\omega)^2\hat{y}(\omega) - 3\hat{y}(\omega) = 2(i\omega)^2\cdot 1$, så $(\omega^2+3)\hat{y}(\omega) = 2\omega^2$,

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2\omega^2}{\omega^2+3} = 2 - \frac{6}{\omega^2+3} = 2 - \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{\omega^2+(\sqrt{3})^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ur tabell fås: Svar: $y(t) = 2\delta(t) - \sqrt{3}\,e^{-\sqrt{3}|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. $u(t) + \int_0^t u(t-r)\cos r \, dr = e^{-t}, \quad t \geq 0.$

Enkelsidig laplacetransform ger $(U = \mathcal{L}_+ u)$:

$$U(s) + U(s)\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s+1}, \quad \text{så} \quad \frac{s^2+1+s}{s^2+1}U(s) = \frac{1}{s+1},$$

$$U(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{s^2+s+1} =$$

$$= \frac{2}{s+1} - \frac{(s+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}, \quad \operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}.$$

Tabell, och regeln $\mathcal{L}(e^{ct}u(t))(s) = (\mathcal{L}u)(s-c)$, ger:

<u>Svar:</u> $u(t) = 2e^{-t} - e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}, \quad t \geq 0.$

4. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (t-1)u' + u = \delta'.$

Enligt produktregeln för derivator kan vänsterledet skrivas $((t-1)u)'$. (Formella räkningar med integrerande faktor kan användas för att få fram detta.) Alltså:

$$((t-1)u)' = \delta', \quad (t-1)u = \delta + C = (t-1)(-\delta + C\,\underline{(t-1)^{-1}}),$$

vilket ger:

<u>Svar:</u> $u = -\delta + C\,\underline{(t-1)}^{-1} + D\delta_1, \quad C, D \in \mathbb{C}.$

5. $y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

$\chi(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{z}{z-1}, \ |z| > 1$, så $\chi(-n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{1/z}{(1/z)-1}, \ |1/z| > 1,$

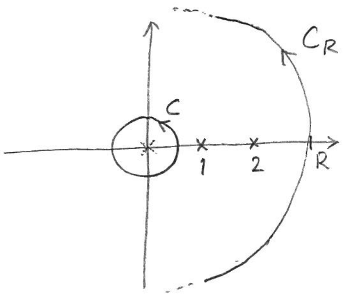
(dvs $0 < |z| < 1$)

så z-transform av differensekvationen ger:

$$z^2 \hat{y}(z) - 4z\hat{y}(z) + 4\hat{y}(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| \in R_y \cap \,]0,1[\, .$$

Så $\hat{y}(z) = \frac{-1}{(z-2)^2(z-1)}, \ |z| \in R_y$, där $R_y = \,]0,1[\, , \ ]1,2[$ eller $]2,\infty[$. För att få en lösning måste vi ta $R_y = \,]0,1[\,$.

Inversionsformeln ger att $y(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \hat{y}(z) z^{n-1} \, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$



För $n \geq 1$ är $\hat{y}(z) z^{n-1}$ analytisk på och innanför C, så $y(n) = 0, \ n \geq 1$.

För $n \leq 0$ gäller att

$$\left| \int_{C_R} \hat{y}(z) z^{n-1} dz \right| \leq \frac{R^{n-1} \cdot 2\pi R}{(R-2)^2(R-1)} \to 0 \text{ då } R \to \infty,$$

så residysatsen ger att $y(n) = -\left(\operatorname*{Res}_1 + \operatorname*{Res}_2 \right) \frac{-z^{n-1}}{(z-2)^2(z-1)} =$

$$= \left. \frac{z^{n-1}}{(z-2)^2} \right|_{z=1} + \left. \left(\frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{z^{n-1}}{(z-1)} \right) \right|_{z=2} = \ldots = 1 + (n-3)2^{n-2}, \quad n \leq 0.$$

<u>Svar:</u> $y(n) = (1 + (n-3)2^{n-2}) \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

6. $u(t) = t^2, \ |t| \leq 1, \quad T = 2 \ \Rightarrow \ \Omega = 2\pi/T = \pi.$

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2 e^{-in\pi t} \, dt = / \text{ om } n \neq 0 /$$

$$= \frac{1}{2} \left[t^2 \frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi} - 2t \frac{e^{-in\pi t}}{-n^2\pi^2} + 2 \frac{e^{-in\pi t}}{in^3\pi^3} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2} \left[t^2 \frac{1}{-in\pi} + 2t \frac{1}{n^2\pi^2} + 2 \frac{1}{in^3\pi^3} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n \neq 0.$$

Detta ger, för heltal $N \geq 1$, att:

forts.

6. forts. $\|u - S_N u\|_{2,T}^2 = /\text{Parseval}/ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(u - S_N u)^\wedge(n)|^2 =$

$$= \sum_{|n|>N} |\hat{u}(n)|^2 = \sum_{|n|>N} \frac{4}{n^4\pi^4} = \frac{8}{\pi^4}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq$$

$$\leq \frac{8}{\pi^4}\int_N^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{8}{\pi^4}\cdot\frac{1}{3N^3} \leq \frac{9}{3^4}\cdot\frac{1}{3N^3} = \frac{1}{(3N)^3}, \quad N \geq 1.$$

Alltså är $\|u - S_N u\|_{2,T} \leq (3N)^{-3/2}$, $N \geq 1$.

7. $u(t) = |t\sin t|$, $t \in \mathbb{R}$.

Funktionen $|\sin t|$ är π-periodisk ($\Omega = 2$) och har fourier-koeff. $c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cdot e^{-in2t} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi (e^{it} - e^{-it})e^{-i2nt}\,dt =$

$= \ldots = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Satsen om punktvis konvergens ger att $|\sin t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2t}$, $t \in \mathbb{R}$, och konvergensen är likformig enligt Weierstrass majorantsats.

Så $|t\sin t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2nt}|t|$, med konvergens i S'.

Tabell:

$$\chi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -i\omega^{-1} + \pi\delta(\omega)$$

$$\chi(-t) \qquad i\omega^{-1} + \pi\delta(\omega) \qquad (\omega^{-1} \text{ udda, } \delta(\omega) \text{ jämn})$$

$$\operatorname{sgn} t = \chi(t) - \chi(-t) \qquad -2i\omega^{-1}$$

$$|t| = t\operatorname{sgn} t \qquad i(-2i)(-1)\omega^{-2} = -2\omega^{-2}$$

Termvis transformerig ger nu:

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \widehat{|t|}(\omega - 2n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}(\omega - 2n)^{-2}.$$