Lösningar, TATA77, 2015-08-27

1. $y''(t) - 2y'(t) = 5e^{2t}\sin t,\ t \geq 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

Enkelsidig laplacetransform ger $(Y = \mathcal{L}_+ y)$:

$$s^2 Y(s) - 2s - 1 - 2(sY(s) - 2) = \frac{5}{(s-2)^2+1}, \text{ så}$$

$$(s^2 - 2s)Y(s) = \frac{5}{s^2-4s+5} + 2s - 3 = \frac{2s^3 - 11s^2 + 22s - 10}{s^2-4s+5}, \text{ så}$$

$$Y(s) = \frac{2s^3 - 11s^2 + 22s - 10}{s(s-2)(s^2-4s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} + \frac{-2s+3}{s^2-4s+5} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{3}{s-2} + \frac{-2(s-2)-1}{(s-2)^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 2. \text{ Ur tabell fås:}$$

Svar: $y(t) = 1 + 3e^{2t} - 2e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t, \quad t \geq 0.$

2. a) $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}.$

$$(u(t-a))^\wedge(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega(t+a)}\,dt =$$

$$= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt = e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

b) $u \in \mathcal{S}',\ a \in \mathbb{R}.$

$$\langle (u(t-a))^\wedge(\omega), \varphi(\omega)\rangle = \langle u(t-a), \hat{\varphi}(t)\rangle = \langle u(t), \hat{\varphi}(t+a)\rangle =$$

$$/\ \hat{\varphi}(t+a) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega(t+a)}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)e^{-i\omega a}e^{-i\omega t}\,d\omega =$$

$$= (e^{-ia\omega}\varphi(\omega))^\wedge(t), \quad t \in \mathbb{R}\ /$$

$$= \langle u(t), (e^{-ia\omega}\varphi(\omega))^\wedge(t)\rangle = \langle \hat{u}(\omega), e^{-ia\omega}\varphi(\omega)\rangle =$$

$$= \langle e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega), \varphi(\omega)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad \text{så} \quad (u(t-a))^\wedge(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega).$$

c) $u(t),\ tu(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$

Derivering under integraltecknet av $\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt$ (här tillåtet) ger: $\hat{u}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}(-it)\,dt,$

$$\text{så} \int_{-\infty}^{\infty} tu(t)e^{-i\omega t}\,dt = i\hat{u}'(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

3. $\hat{u}(s) = \dfrac{s^3 - s + 2}{s^2 + s}$, $\quad \mathrm{Re}\, s < -1.$

$\hat{u}(s) = s - 1 + \dfrac{2}{s^2+s}$. $\qquad \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$, så $\delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s$.

Inverstransformen av $\dfrac{2}{s^2+s}$, $\mathrm{Re}\, s < -1$, ges av

$\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_L \dfrac{2}{s^2+s} e^{st}\, ds$, där L är linjen $s = -2 + i\omega$, $-\infty \xrightarrow{\omega} \infty$.

Residysatsen och uppskattningar ger att detta är 0 då $t > 0$, och då $t < 0$ fås:

$$-\left(\operatorname*{Res}_{-1} + \operatorname*{Res}_{0}\right) \frac{2e^{st}}{s^2+s} = -\frac{2e^{-t}}{2(-1)+1} - \frac{2e^{0t}}{2\cdot 0 + 1} = 2e^{-t} - 2.$$

<u>Svar:</u> $u = \delta' - \delta + (2e^{-t} - 2)\chi(-t)$.

4. $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} y(n-k) = 3\chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

$2^{-|n|} = 2^{-n}\chi(n) + 2^{n}\chi(-n) - \delta(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Vi har: $\quad \chi(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z-1}$, $\quad |z| > 1$

$2^{-n}\chi(n) \qquad \dfrac{z}{z - 1/2}$, $\quad |z| > \dfrac{1}{2}$

$2^{n}\chi(-n) \qquad \dfrac{1/z}{\frac{1}{z} - \frac{1}{2}}$, $\quad \left|\dfrac{1}{z}\right| > \dfrac{1}{2}$

så z-transform av faltningsekvationen ger att

$$\left(\frac{z}{z - 1/2} + \frac{1/z}{\frac{1}{z} - \frac{1}{2}} - 1\right)\hat{y}(z) = \frac{3z}{z-1}, \quad |z| \in R_y \cap\,]1,2[\,,$$

så $-\dfrac{3z}{2z^2 - 5z + 2}\,\hat{y}(z) = \dfrac{3z}{z-1}$, så

$$\hat{y}(z) = -\frac{2z^2 - 5z + 2}{z-1} = -2z + 3 + \frac{1}{z-1} = -2z + 3 + \frac{1}{z}\,\frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Ur tabell fås $\quad$ <u>Svar:</u> $y(n) = -2\delta(n+1) + 3\delta(n) + \chi(n-1), \ n \in \mathbb{Z}.$

5. Antag att y löser ekv. $y''(t) + 4y(t-\pi) = f(t)$, där $T = 2\pi$ (så $\Omega = 1$) och $f(t) = t$, $0 \le t < 2\pi$. Då gäller att

$$(in)^2 \hat{y}(n) + 4e^{-in\pi}\hat{y}(n) = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$n=2$ ger $VL = ((2i)^2 + 4e^{-i2\pi})\hat{y}(2) = (-4+4)\hat{y}(2) = 0$,

och $HL = \hat{f}(2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t e^{-i2t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\,\frac{e^{-i2t}}{-2i} - 1\,\frac{e^{-i2t}}{-4}\right]_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\frac{1}{-2i} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{i}{2} \neq 0$, vilket är en motsägelse. Alltså finns ingen lösning till ekvationen.

6. $u(t) = n^2$ då $n \le t < n+1$, för $n \in \mathbb{Z}$.

$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \begin{cases} 1, & n \le t < n+1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, och

$$\int_n^{n+1} 1 e^{-i\omega t}\,dt = \frac{e^{-i\omega(n+1)} - e^{-i\omega n}}{-i\omega} = \overbrace{\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}}^{f(\omega)} e^{-i\omega n},$$

så i distributionsmening har vi:

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 f(\omega) e^{-i\omega n} = -f(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-in)^2 e^{-in\omega} =$$

$= \Big/$ Enl. fourierserie för ett pulståg, deriverad två gånger. $\Big/ = -f(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta''(\omega - 2\pi n)$,

så $\hat{u}(\omega) = -2\pi f(\omega)\delta''(\omega)$ på $]-2\pi, 2\pi[$.

$$f(\omega) = \frac{1}{i\omega}\left(1 - \left(1 - i\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{i\omega^3}{6} + \ldots\right)\right) = 1 - \frac{i\omega}{2} - \frac{\omega^2}{6} + \ldots,$$

så $f(0) = 1$, $f'(0) = -\frac{i}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{3}$.

Eftersom $f(\omega)\delta''(\omega) = f(0)\delta''(\omega) - 2f'(0)\delta'(\omega) + f''(0)\delta(\omega)$

fås:

<u>Svar:</u> $\hat{u}(\omega) = -2\pi\delta''(\omega) - 2\pi i\delta'(\omega) + \frac{2\pi}{3}\delta(\omega)$ på $]-2\pi, 2\pi[$.

7. $u \in \mathcal{L}^1_T$ och $|u(t+h) - u(t)| \le C|h|^\alpha$, $t, h \in \mathbb{R}$. $(C \ge 0,\ 0 < \alpha \le 1.)$

$$\int_T (u(t+h) - u(t)) e^{-in\Omega t} \, dt = (e^{in\Omega h} - 1) \hat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z},\ h \in \mathbb{R} \ (\Omega = \tfrac{2\pi}{T}),$$

så med $h = \frac{1}{n\Omega}$ (för $n \neq 0$) fås:

$$(e^i - 1) \hat{u}(n) = \int_T (u(t + \tfrac{1}{n\Omega}) - u(t)) e^{-in\Omega t} \, dt, \quad n \neq 0.$$

Detta ger:

$$|e^i - 1| |\hat{u}(n)| \le \int_T |u(t + \tfrac{1}{n\Omega}) - u(t)| |e^{-in\Omega t}| \, dt \le$$

$$\le C \left| \frac{1}{n\Omega} \right|^\alpha, \quad n \neq 0.$$

Så $|\hat{u}(n)| \le D|n|^{-\alpha}$, $n \neq 0$, där $D = \dfrac{C}{|e^i - 1| \Omega^\alpha}$.