Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2015-08-27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd laplacetransform för att lösa differentialekvationen
$$y''(t) - 2y'(t) = 5e^{2t}\sin t, \quad t \geq 0,$$
med begynnelsevillkoren $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

2. (a) Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att fouriertransformen av funktionen $u(t-a)$ är $e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$. (1p)
   (b) Antag att $u \in \mathcal{S}'$ och att $a \in \mathbb{R}$. Visa att fouriertransformen av distributionen $u(t-a)$ är $e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$. (1p)
   (c) Antag att funktionerna $u(t)$ och $tu(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Visa att funktionen $tu(t)$ har fouriertransformen $i\hat{u}'(\omega)$. (1p)

3. Bestäm den distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vars laplacetransform ges av
$$\hat{u}(s) = \frac{s^3 - s + 2}{s^2 + s}, \quad \operatorname{Re} s < -1.$$

4. Bestäm en lösning y till ekvationen $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}y(n-k) = 3\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Visa att det inte finns någon 2π-periodisk distribution y sådan att
$$y''(t) + 4y(t-\pi) = f(t),$$
där funktionen f har period 2π och $f(t) = t$ då $0 \leq t < 2\pi$.

6. Låt $u(t) = n^2$ då $n \leq t < n+1$, för $n \in \mathbb{Z}$. Bestäm de konstanter A, B och C för vilka $\hat{u}(\omega) = A\delta''(\omega) + B\delta'(\omega) + C\delta(\omega)$ på intervallet $]-2\pi, 2\pi[$.

7. Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$ och att det finns konstanter $C \geq 0$ och $0 < \alpha \leq 1$ sådana att $|u(t+h) - u(t)| \leq C|h|^\alpha$ för alla $t, h \in \mathbb{R}$. Visa att det finns en konstant $D \geq 0$ sådan att u:s fourierkoefficienter uppfyller $|\hat{u}(n)| \leq D|n|^{-\alpha}$ för alla $n \neq 0$.

Lycka till!