Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Mats Aigner

Kurskod: TATA77
Provkod: TEN1

Tentamen i Fourieranalys, TATA77

2014-10-31 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel, förutom *Formelsamling för Fourieranalys*, MAI.

Lösningarna ska vara fullständiga och välmotiverade.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyget 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, elva respektive fjorton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Använd z-transform för att lösa differensekvationen
$$y(n+2) - y(n+1) + y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$
med begynnelsevillkoren $y(0) = 4$, $y(1) = 2$.

2. (a) Förenkla distributionen $(\cos t)\delta''$. (1p)
   (b) Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $t^2 u' = 1$. (1p)
   (c) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Visa att $u'(t)$ har laplacetransformen $s\hat{u}(s)$. (1p)

3. Låt funktionen u ha period 2π och ges av $u(t) = e^{iat}$ då $-\pi \le t < \pi$, där $a \in \mathbb{R}$ *inte* är ett heltal. Bestäm u:s fourierserie och använd resultatet för att visa att
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{a-n} = \frac{\pi}{\tan a\pi}.$$

4. Bestäm alla lösningar $y \in \mathcal{S}'$ till differentialekvationen $y'' + y' - 2y = \delta''$.

5. Bestäm en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ vars laplacetransform är
$$\hat{u}(s) = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

6. Bestäm en lösning u till integralekvationen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-r|}u(r)\,dr = t^2 e^t \chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Visa att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\,\frac{\sin(\omega/2^2)}{\omega/2^2}\cdots\frac{\sin(\omega/2^n)}{\omega/2^n}\,d\omega = \pi$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lycka till!