LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2019-06-13

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2019-06-13

1) Sätt $u = 3x+y$, $v = x-y$ (Rita!) så är $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = -4$ d v s $dxdy = \dfrac{dudv}{4}$. Detta ger (I = sökt integral)

$$I = \int_{-5}^{3}\left(\int_{1}^{5}\frac{u+v}{4}\cdot\frac{1}{4}du\right)dv = \frac{1}{4}\int_{-5}^{3}(v+3)dv = 4.$$

2a) Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = e^x z'_u$ och p s s $z'_y = z'_u + e^y z'_v$ vilket ger

$$2e^{x+2y} = z'_x - e^x z'_y = e^x z'_u - e^x\left(z'_u + e^y z'_v\right) = -e^{x+y}z'_v \Leftrightarrow z'_v = -2e^y = -2v \Leftrightarrow z = -v^2 + f(u),$$

d v s allmänna lösningen blir $z = -e^{2y} + f(e^x + y)$ där $f \in \mathcal{C}^2$ är en godtycklig envariabelfunktion.

2b) $z''_{xy} = 3x^2 \Leftrightarrow z'_x = 3x^2y + h(x) \Leftrightarrow \Big/ f(x) = \int h(x)dx \Big/ \Leftrightarrow z = x^3y + f(x) + g(y)$ där $f, g \in \mathcal{C}^2$ är godtyckliga envariabelfunktioner.

2c) Förlängning med den integrerande faktorn e^x ger att $y = e^x z'_x + e^x z = (e^x z)'_x \Leftrightarrow e^x z = xy + f(y) \Leftrightarrow z = (xy + f(y))\,e^{-x}$ där $f \in \mathcal{C}^2$ är en godtycklig envariabelfunktion.

3) Byte till polära koordinater ger (I = sökt integral)

$$I = \int_{1}^{2}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^3}e^{\rho}\cdot\rho d\varphi\right)d\rho = \int_{1}^{2}\rho e^{\rho}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}d\rho = \frac{2}{3}\left([\rho e^{\rho}]_1^2 - \int_1^2 e^{\rho}d\rho\right) = \frac{2e^2}{3}.$$

4a) Betrakta differenskvoten $\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \dfrac{\frac{(-2k)^2+k^2+(-k)^3}{k^2} - f(0,0)}{k} = \dfrac{5-k-f(0,0)}{k}$.
Vi ser att om $f(0,0) \neq 5$ existerar inte gränsvärdet av denna differenskvot då $k \to 0$. Enda möjligheten är alltså $f(0,0) = 5$ vilket ger $f'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}(-1) = -1$.

4b) Räkningarna i a) visar att $f(0,y) \to 5$, $y \to 0$ så enda möjliga gränsvärdet är 5. Betrakta

$$|f(x,y)-5| = \left|\frac{5x^2+5y^2+(x-y)^3}{x^2+y^2} - 5\right| = \left|\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^2+y^2}\right| = /\text{polära}/$$
$$= \left|\frac{\rho^3\cos^3\varphi - 3\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi - \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2}\right| \leq \rho\big(|\cos^3\varphi|$$
$$+3|\cos^2\varphi\sin\varphi| + 3|\cos\varphi\sin^2\varphi| + |\sin^3\varphi|\big) \leq \rho(1+3+3+1) = 8\rho \to 0,\ \rho \to 0,$$

enligt triangelolikheten. Då 8ρ inte beror på φ följer att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 5$ enligt sats.

5) Observera att $x^2 + y^2 \leq 1 - 2y \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 \leq 2$. Låt E vara det halva cirkelsegment i xy-planet som beskrivs av denna olikhet samt av att $x, y \geq 0$. Stavar i z-led ger då (Rita!) (V = sökt volym):

$$V = \iint_E\left(\int_0^{x+y+1}dz\right)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{-1+\sqrt{2-x^2}}(x+y+1)dy\right)dx = \int_0^1\left[xy + \frac{(y+1)^2}{2}\right]_0^{-1+\sqrt{2-x^2}}dx$$
$$= \int_0^1\left(-x + x\sqrt{2-x^2} + \frac{1-x^2}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-3}{6}.$$

6) Låt (a, b, c) vara en punkt där Π tangerar S och sätt $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 2z^3$. Då är $\nabla f(a, b, c) = 3(a^2, 2b^2, 2c^2)$ normal till S i (a, b, c) och därför oclså normal till Π. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ 2b^2 \\ 2c^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b^2 - 2c^2 \\ -a^2 + 4c^2 \\ a^2 - 4b^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = \pm c,\ a = \pm 2c\ ,\ \text{(4 möjligheter)}.$$

Då (a, b, c) ligger i Π är $2a+b+c = 4$ vilket ger möjligheterna $(a, b, c) = (4/3, 2/3, 2/3)$ (ger $k = 32/9$), $(a, b, c) = (2, -1, 1)$ (ger $k = 8$), $(a, b, c) = (4, -2, -2)$ (ger $k = 32$) och $(a, b, c) = (2, 1, -1)$ (ger $k = 8$).

Mer än en tangeringspunkt får vi alltså bara om $k = 8$ då Π tangerar i både $(2, -1, 1)$ och $(2, 1, -1)$.

7) Då Π är parallellt med x-axeln har Π:s normal formen $\bar{n} = (0, b, c)$ och vi noterar att om $c = 0$ blir planet lodrätt och delar därför inte D alls (Rita!). Alltså är $c \neq 0$ vilket ger $\bar{n} = c(0, -2t, 1)$ där vi satt $-2t = b/c$. Π:s ekvation blir därför $-2ty + z = 1 - 2t$ för något t. I en omsorgsfullt ritad figur syns att om $t < 0$ eller $t > 1$ har Π och D ingen annan gemensam punkt än just $(0, 1, 1)$ så för sökta planet gäller det att $0 \leq t \leq 1$.

Om D_1 är undre delen av D beräknar vi volymen V av D_1 m h a stavar i z-led, där D_1:s projektion E i (x, y)-planet ges av $x^2 + y^2 \leq 1 - 2t + 2ty \Leftrightarrow x^2 + (y - t)^2 \leq (1 - t)^2$. Detta ger

$$V = \iint_E \left(\int_{x^2+y^2}^{1-2t+2ty} dz \right) dxdy = \iint_E \left((t-1)^2 - x^2 - (y-t)^2\right) dxdy = /x = \rho\cos\varphi,\ y - t = \rho\sin\phi/$$

$$= \int_0^{1-t} \left(\int_0^{2\pi} \left((1-t)^2 - \rho^2\right) \cdot \rho\, d\varphi \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{(1-t)^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{1-t} = \frac{\pi}{2}(1-t)^4.$$

Då volymen av hela D är $\pi/2$ (visat på föreläsning, kan också integreras fram) söker vi alltså $0 \leq t \leq 1$ så att $\dfrac{\pi}{2}(1-t)^4 = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow (1-t)^4 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t = 1 - 2^{-1/4}$.

Sökta ekvationen blir därför $-(2 - 2^{3/4})y + z = 2^{3/4} - 1$.