LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2019-03-21

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2019-03-21

1a) Ekvationen för S blir $x^2 + 2y^2 + 3z = 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1) = 3$ och då $\nabla f(2, 1, -1) = (4, 4, 3)$ är en normal till sökta tangentplanet blir ekvationen för detta $4x + 4y + 3z = 9$.

1b) Första ekvationen ger $u = 2x^2 - 3xy + 2x + g(y)$ där $g \in \mathcal{C}^1$ är godtycklig. Insättning i andra ekvationen ger sedan $y - x + 3 = u'_y = \left(2x^2 - 3xy + 2x + g(y)\right)'_y = -3x + g'(y) \Leftrightarrow g'(y) = y + 2x + 3$ vilket är en motsägelse (Varför?). Det följer att systemet saknar lösning.

2) Enligt en figur (Rita!) ges D av olikheterna $\sqrt{y} \le x \le 4 - y$, $0 \le y \le 2$. Detta ger (I = sökt integral):

$$I = \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{y}}^{4-y} \frac{x}{4-y}\, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(4-y)^2 - y}{4-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(4 - y + 1 - \frac{4}{4-y} \right) dy = 4 - 2\ln 2.$$

3) Låt (a, b) vara sökta tangeringspunkten. Då är $\nabla f(a, b) = 2(a + 2b, 2a)$ normal till sökta tangentlinjen och därför parallell med normalen $(2, 1)$ till den givna linjen vilket ger

$$0 = \det \begin{bmatrix} a + 2b & 2 \\ 2a & 1 \end{bmatrix} = 2b - 3a \Leftrightarrow b = \frac{3a}{2},$$

vilket insatt i $f(a, b) = 28$ ger $7a^2 = 28 \Leftrightarrow a = \pm 2$. Sökta tangeringspunkterna är alltså $(2, 3)$ och $(-2, -3)$ och tangentlinjerna till Γ i dessa punkter blir $2x + y = 7$ resp. $2x + y = -7$.

4) D beskrivs av $x^2 + y^2 + (z - \ln 2)^2 \le (\ln 2)^2$ så D är ett klot med centrum i $(0, 0, \ln 2)$ och radie $\ln 2$. Bytet $u = x$, $v = y$, $w = z - \ln 2$ överför D till $E : u^2 + v^2 + w^2 \le (\ln 2)^2$, vilket ger ($I$ = sökt integral):

$$I = \iiint_E 2e^w dudvdw = /\text{rymdpol.}/ = 2\int_0^{\ln 2} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta} \cdot r^2 \sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr = 4\pi \int_0^{\ln 2} r\left[-e^{r\cos\theta}\right]_0^{\pi} dr$$

$$= 4\pi \int_0^{\ln 2} \left(re^r - re^{-r}\right) dr = 4\pi \left[re^r + re^{-r}\right]_0^{\ln 2} - 4\pi \int_0^{\ln 2} \left(e^r + e^{-r}\right) dr = 2\pi(5\ln 2 - 3).$$

5a) Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -y/x^2 \cdot z'_u + z'_v$, $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 1/x \cdot z'_u$. Insättning ger sedan

$$xy^2 = x \cdot \left(-\frac{y}{x^2} z'_u + z'_v \right) + y \cdot \frac{1}{x} z'_u = xz'_v \Leftrightarrow z'_v = y^2 = u^2v^2 \Leftrightarrow z = \frac{u^2v^3}{3} + f(u),$$

där $f \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion. Återgång till ursprungliga variablerna ger den allmänna lösningen $z = \dfrac{xy^2}{3} + f(y/x)$.

Då $z'_y = \dfrac{2xy}{3} + f'(y/x) \cdot 1/x$ ger det givna villkoret att $0 = z'_y(3, y) = 2y + f'(y/3) \cdot 1/3 \Leftrightarrow f'(t) = -18t \Leftrightarrow f(t) = -9t^2 + C$. Sökta partikulärlösningarna blir alltså $z = \dfrac{xy^2}{3} - 9\dfrac{y^2}{x^2} + C$ där C är en godtycklig konstant.

5b) Samma variabelbyte som i 5a) ger ekvationen $vz'_v - z = u^2v^3 \Leftrightarrow z'_v - \dfrac{1}{v}z = u^2v^2$. $e^{-\ln v} = \dfrac{1}{v}$ är alltså en integrerande faktor vilket ger $\left(\dfrac{1}{v}z\right)'_v = \dfrac{1}{v}z'_v - \dfrac{1}{v^2}z = u^2v \Leftrightarrow \dfrac{1}{v}z = \dfrac{u^2v^2}{2} + g(u) \Leftrightarrow z = \dfrac{u^2v^3}{2} + vg(u)$.
Allmänna lösningen blir alltså $z = \dfrac{xy^2}{2} + xg(y/x)$ där $g \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion.

6) Sätt $u = x - 2y$, $v = x$, $w = 3x - 4y + z$ så är $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = 2$ d v s $dxdydz = \dfrac{dudvdw}{2}$ och D avbildas på $E = \{(u,v,w); u^2 \le w \le 1\,,\ 0 \le v \le 1\}$, d v s E är en bit av en parabolisk cylinder (Rita!). Detta ger ($I =$ sökt integral, använder stavar i w-led):

$$I = \iiint_E (w - 2u - v) \cdot \frac{1}{2} dudvdw = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{u^2}^1 (w - 2u - v) dw \right) du \right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{u^4}{2} - (2u + v)(1 - u^2) \right) du \right) dv.$$

Observera nu att integrationsintervallet i den inre integralen är symmetriskt samtidigt som $-2u(1-u^2)$ är udda och resten av integranden är jämn, sedd som funktion av u. Detta ger

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(1 - u^4 - 2v(1 - u^2)\right) du \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{4}{5} - \frac{4v}{3} \right) dv = \frac{1}{15}.$$

7a) Låt $g(x) = x^2$ för $x \ge 0$ och $g(x) = -x^2$ för $x \le 0$. Då är $g'(x) = 2x$ för $x > 0$ och $g'(x) = -2x$ för $x < 0$. Vidare är $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{h^2 - 0}{h} = 0$ och $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{-h^2 - 0}{h} = 0$ vilket visar att $g'(0) = 0$ Det följer att $g'(x) = 2|x|$ för alla x och vi vet från kurserna i envariabelanalys att $g''(0)$ inte existerar.

Sätt nu $f(x,y) = yg(x)$. Då är $f''_{xy}(x,y) = (yg'(x))'_y = g'(x)$ och $f''_{yx}(x,y) = ((yg(x))'_y)'_x = g'(x) = f''_{xy}(x,y)$ för alla (x,y). Men om $y \ne 0$ är $f''_{xx}(x,y) = yg''(x)$ som ej existerar om $x = 0$. Vårt f är alltså inte två gånger partiellt deriverbar och därför är $f \notin \mathcal{C}^2$. Påståendet är alltså falskt och f given ovan är ett motexempel.

7b) Då g_1 är kontinuerlig i $(0,0)$ är $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} g_1(x,y) = a$.

Speciellt är då $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = a$. Om $a \ne b$ ger detta att täljaren i differenskvoten $\dfrac{g_2(h,0) - g_2(0,0)}{h} = \dfrac{f(h,0) - b}{h}$ inte går mot 0 då $h \to 0$. Differenskvoten saknar alltså ändligt gränsvärde då $h \to 0$, d v s g_2 är *inte* partiellt deriverbar m a p x i origo. Enda möjligheten är alltså att $a = b$ och påståendet är därmed bevisat.