LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

TATA76
TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2019-03-21 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n-1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1a) Låt S vara den nivåyta till $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z$ som innehåller punkten $(2,1,-1)$. Ange en ekvation för S samt för tangentplanet till S i $(2,1,-1)$.

1b) Finn alla lösningar $u(x,y) \in \mathcal{C}^2$ till systemet $\begin{cases} u'_x &= 4x-3y+2 \\ u'_y &= y-x+3 \end{cases}$.

2) D är det begränsade området i första kvadranten som begränsas av x-axeln samt kurvorna $x+y=4$, $y=x^2$ och $y=2$. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{x}{4-y}\,dxdy$.

3) Bestäm ekvationer för alla tangentlinjer till $\Gamma : f(x,y) = x^2+4xy = 28$ som är parallella med $y=-2x$. Ange också tangeringspunkterna.

4) Beräkna $\displaystyle\iiint_D e^z\,dxdydz$ där D ges av $x^2+y^2+z^2 \le 2z\ln 2$.

5a) Lös ekvationen $xz'_x + yz'_y = xy^2$ där $z(x,y) \in \mathcal{C}^1$ för $x>0$ t ex genom variabelbytet $u = y/x$, $v = x$. Bestäm också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z'_y(3,y) = 0$.

5b) Lös också ekvationen $xz'_x + yz'_y - z = xy^2$ där $z(x,y) \in \mathcal{C}^1$ för $x>0$.
Ledning: Hämta idéer från 5a).

6) Beräkna $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$ om $D = \{(x,y,z); x^2-4xy+4y^2 \le 3x-4y+z \le 1\,,\ 0 \le x \le 1\}$.

7) Ge bevis eller motexempel till följande påståenden.

(a) Om $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ för alla (x,y) är $f \in \mathcal{C}^2$.

(b) Låt $f(x,y)$ vara definierad för $(x,y) \neq (0,0)$ och sätt

$$g_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ a & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g_2(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ b & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Om g_1 är kontinuerlig i $(0,0)$ och g_2 är partiellt deriverbar i $(0,0)$ så måste $a = b$.