LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2018-08-24

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2018-08-24

1) I en figur (Rita!) ser vi att D ges av $x^3 \le y \le x^2$, $0 \le x \le 1$ så (I = sökt integral)

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} e^{-y/x} dy \right) dx = \int_0^1 x \left(e^{-x^2} - e^{-x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{3-e}{2e}.$$

2) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2xy\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Insättning i givna ekvationen ger sedan

$$xy + 2y^2 = 2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy^2\frac{\partial z}{\partial v} - y\frac{\partial z}{\partial u} - 2xy^2\frac{\partial z}{\partial v} = -y\frac{\partial z}{\partial u} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = -x - 2y = -\frac{v}{u^2} - 2u,$$

med lösningen $z = v/u - u^2 + f(v) = xy - y^2 + f(xy^2)$, där $f \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion. Då $z'_x(x,y) = y + f'(xy^2) \cdot y^2$ är $8x = z'_x(x,2) = 2 + 4f'(4x) \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{2} + C$. De sökta lösningarna blir alltså $z = xy - y^2 + \dfrac{x^2y^4}{4} - \dfrac{xy^2}{2} + C$ där C är en godtycklig konstant.

3) Sätt $u = \sqrt{3}x$, $v = y$ så att $dxdy = \dfrac{dudv}{\sqrt{3}}$. D avbildas då på E i uv-planet givet av $u^2 + v^2 \le 4$, $v \ge -\dfrac{u}{\sqrt{3}}$, $u \ge 0$. Byte till polära koordinater i uv-planet (Rita!) ger då (I = sökt integral)

$$I = \frac{1}{3}\iint_E uv^2\, dudv = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \rho^3 \cos\varphi \sin^2\varphi \cdot \rho\, d\varphi \right) d\rho = \frac{1}{3}\int_0^2 \rho^4 \left[\frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_{-\pi/6}^{\pi/2} d\rho = \frac{1}{8}\left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^2 = \frac{4}{5}.$$

4a) Se kursboken.

4b) Då $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ och $\nabla f(x,y) = \left(2\ln(3+4x-5y) + \dfrac{4(1+2x)}{3+4x-5y}, -\dfrac{5(1+2x)}{3+4x-5y} \right)$ är enligt sats

$$f'_{\bar{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \bar{v} = \left(2\ln 3 + \frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2\ln 3 + 3).$$

4c) Om g är en sådan funktion är $g(0) = g(0+0) = f(0,0) = 1$ och $g(0) = g(\pi/2 + (-\pi/2)) = f(\pi/2, -\pi/2) = -1 \ne 1$ vilket är en motsägelse. Det finns alltså ingen sådan funktion.

5) D är mängden ovanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och inuti klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 6$. Vi använder stavar i z-led. Yttre dubbelintegralen blir då över området givet av $(x^2+y^2)^2 \le 6 - (x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 2$ (ses enklast i en teckentabell efter omflyttning och faktorisering) vilket ger (V = sökt volym)

$$V = \iiint_D dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \le 2} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-(x^2+y^2)}} dz \right) dxdy = / \text{ polära } / = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{6-\rho^2} - \rho^2 \right) \rho\, d\varphi \right) d\rho$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(6-\rho^2)^{3/2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(-\frac{8}{3} - 1 + 2\sqrt{6} \right) = \frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6} - 11).$$

6) Kalla tangeringspunkten (a, b, c) och sätt $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ så att $f(x, y, z) = 10$ på S. Då är $\nabla f(a, b, c) = 2(a, 2b, 4c) =: 2\bar{n}$ normal till sökta tangentplanet som därför får ekvationen $ax + 2by + 4cz = a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 10$ ty $(a, b, c) \in S$. Observera att om ett plan innehåller 2 punkter på en linje så innehåller planet med nödvändighet hela linjen. Det räcker alltså att se till att planet innehåller t ex $(0, -2, -1)$ och $(2, -1, -2)$. Detta ger ekvationerna $-4b - 4c = 10$ och $2a - 2b - 8c = 10$. Första ekvationen ger $b = -5/2 - c$ vilket insatt i den andra ger $a = 5/2 + 3c$. Villkoret $f(a, b, c) = 10$ ger nu

$$10 = \left(\frac{5}{2} + 3c\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2} - c\right)^2 + 4c^2 = \frac{75}{4} + 25c + 15c^2 \Leftrightarrow c^2 + \frac{5}{3}c + \frac{7}{12} = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \text{ eller } c = -\frac{7}{6}.$$

De sökta tangentplanen blir därmed $x - 4y - 2z = 10$ (tangerar i $(1, -2, -1/2)$) och $-x - \frac{8y}{3} - \frac{14z}{3} = 10 \Leftrightarrow 3x + 8y + 14z = -30$ (tangerar i $(-1, -4/3, -7/6)$).

7) Välj koordinatsystem så att origo sammanfaller med det hörn i D där den räta vinkeln befinner sig och så att de övriga hörnen ligger på positiva x- resp. y-axeln, i punkterna $(a, 0)$ resp. $(0, b)$ där a, $b > 0$. Vi ser (Rita!) att D:s hypotenusa ges av $bx + ay = ab$, $0 \leq x \leq a$. I detta koordinatsystem är $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, vilket ger ($I =$ den i uppgiften givna integralen)

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{b - \frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \left(x^2\left(b - \frac{b}{a}x\right) + \frac{1}{3}\left(b - \frac{b}{a}x\right)^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} - \frac{a}{12b}\left(b - \frac{b}{a}x\right)^4\right]_0^a = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12} = \Big/ a = \frac{2A}{b} \Big/ = \frac{A}{6}\left(\frac{4A^2}{b^2} + b^2\right) =: f(b).$$

Alltså är $f'(b) = \frac{A}{3b^3}(b^4 - 4A^2)$ vilket ger att $f'(b) < 0$ för $0 < b < \sqrt{2A}$ och $f'(b) > 0$ för $b > \sqrt{2A}$, vilket visar att $f\left(\sqrt{2A}\right) = \frac{2A^2}{3}$ är f:s, och därmed I:s, minsta värde. Då (t ex) $f(b) \to \infty$, $b \to \infty$ följer att I kan anta alla värden $\geq \frac{2A^2}{3}$.