LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2018-06-08

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2018-06-08

1) Sätt $u = x + y$, $v = x - 2y \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(2u + v)$, $y = \frac{1}{3}(u - v)$, $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = -3$ d v s $dxdy = \left|-\frac{1}{3}\right| dudv = \frac{1}{3}dudv$ och D övergår till en rektangel given av $0 \le u \le 6$, $-3 \le v \le 0$. Detta ger (I = sökt integral)

$$I = \int_0^6 \left(\int_{-3}^0 \left(\frac{1}{9}(2u+v)^2 + \frac{1}{9}(u-v)^2 \right) \cdot \frac{1}{3}dv \right) du = \frac{1}{27} \int_0^6 \left(\int_{-3}^0 (5u^2 + 2uv + 2v^2)dv \right) du$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^6 (5u^2 - 3u + 6)du = 40 - 6 + 4 = 38.$$

2) Antag att de sökta linjerna tangerar Γ i (a, b) så att $9ab^2 = 4$. Då är $\nabla f(a, b) = 9b(b, 2a)$ en normal till sökta tangentlinjen och vektorn $(-a, \sqrt{3} - b)$ är parallell med samma linje. Detta ger $0 = (b, 2a) \cdot (-a, \sqrt{3} - b) = a(2\sqrt{3} - 3b) \Leftrightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ty $a \neq 0$ på Γ. Ekvationen $9ab^2 = 4$ ger sedan $a = 1/3$. Sökta tangentlinjen ges alltså av (lin. alg.) $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$.

Enhetsvektorn $\bar{v}$ riktad från (a, b) rakt mot origo är $\bar{v} = -\frac{1}{\sqrt{13}}(1, 2\sqrt{3})$. Sökta riktningsderivatan blir därför, enligt sats $f'_{\bar{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \bar{v} = 6\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{13}}(1, 2\sqrt{3})\right) = -\frac{36}{\sqrt{13}}$.

3) Byte till sfäriska koordinater ger (Rita!) att (I = sökt integral)

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^2 r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi \cdot r^2 \sin\theta d\varphi\, dr \right) d\varphi \right) d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{8(\pi+2)}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{8(\pi+2)}{5} \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{16(\pi+2)}{15}.$$

4a) $f(x, y) = C \Leftrightarrow e^C = \frac{x^2}{1-y^2}$, $x > 0, -1 < y < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^C} + y^2 = 1$, $x > 0, -1 < y < 1$. Nivåkurvorna är alltså högra halvan av ellipser med centrum i origo och halvaxlar $e^{C/2}$ och 1 i x- resp. y-led. De givna värdena $C = -2\ln 2, -\ln 2, 0, \ln 2, 2\ln 2$ ger alltså halvaxellängderna $1/2, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$ i x-led. För $C = 0$ blir kurvan alltså en halvcirkel.

4b) Då

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{\frac{-k^2(3+k+2k^2)}{3k^2} - (-1)}{k} = -\frac{1}{3} - \frac{2k}{3} \to -\frac{1}{3}, \ k \to 0$$

följer att $f'_y(0, 0) = -\frac{1}{3}$.

5) Dela D i två delar så att $x + y^2 < 0$ i ena delen och $x + y^2 \ge 0$ i den andra. Då är (I = sökt integral)

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^{-y^2} (-x - y^2)dx \right) dy + \int_{-1}^1 \left(\int_{-y^2}^1 (x + y^2)dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^4}{2} - y^2 + \frac{1}{2} \right) dy + \int_{-1}^1 \left(\frac{y^4}{2} + y^2 + \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \int_{-1}^1 (y^4 + 1)dy = \frac{12}{5}.$$

6) Kedjeregeln och produktregeln för derivator ger

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2\frac{\partial z}{\partial u} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}
$$

Detta ger

$$
\begin{aligned}
3x^2(1+8xy) &= x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial z}{\partial u} - 8x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\
&\quad -8x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 8x^3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial u} = 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},
\end{aligned}
$$

d v s $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \dfrac{3}{4x} + 6y = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt{u-v}} + 6v \Leftrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{3}{2}\sqrt{u-v} + 3v^2 + f(u).$

Integration ger nu att $z = (u-v)^{3/2} + v^3 + vf(u) + g(u) = x^3 + y^3 + yf(x^2+y) + g(x^2+y)$, där f, g är godtyckliga envariabelfunktioner av klass $\mathcal{C}^2$, är alla lösningar till den givna ekvationen.

Villkoret $z(x,0) = x^3$ ger att $x^3 + g(x^2) = x^3 \Leftrightarrow g(t) = 0$. Derivering ger sedan $z'_x(x,y) = 3x^2 + 2xyf'(x^2+y)$ och $z'_y(x,y) = 3y^2 + f(x^2+y) + yf'(x^2+y)$. Villkoret $z'_x(x,x^2) = 2xz'_y(x,x^2)$ ger alltså

$$
3x^2 + 2x^3f'(2x^2) = 6x^5 + 2xf(2x^2) + 2x^3f'(2x^2) \Leftrightarrow f(2x^2) = \frac{3x}{2} - 3x^4 \Leftrightarrow f(t) = \frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{2}} - \frac{3t^2}{4}.
$$

Sökta lösningen blir alltså $z = x^3 + y^3 + \dfrac{3y}{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y} - \dfrac{3}{4}y(x^2+y)^2.$

7) Sätt $f(x,y,z) = z - u(x,y)$. Då är $\bar{n} = \nabla f(a,b,u(a,b)) = (-u'_x(a,b), -u'_y(a,b), 1)$ en normalvektor till Π. Då u löser det givna ekvationssystemet följer att $\bar{n} = (f(a,b)u(a,b), g(a,b)u(a,b), 1)$. Π får alltså ekvationen

$$
f(a,b)u(a,b)(x-a) + g(a,b)u(a,b)(y-b) + z - u(a,b) = 0,
$$

och vi ser att t ex punkten $(x,y,z) = \left(a + \dfrac{1}{f(a,b)}, b, 0\right)$ löser planets ekvation oavsett vad $u(a,b)$ är. Denna punkt (och många andra, kan du se vilka?) ligger alltså i samtliga dessa tangentplan Π.