LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2018-03-15

# Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2018-03-15

1a) Första ekvationen ger $u = e^{xyz} + 3e^{2x-y} - e^x + f(y,z)$. Insättning i andra ger sedan $xze^{xyz} - 3e^{2x-y} - e^{y+2z} = u'_y = xze^{xyz} - 3e^{2x-y} + f'_y(y,z) \Leftrightarrow f'_y(y,z) = -e^{y+2z} \Leftrightarrow f(y,z) = -e^{y+2z} + g(z)$. Insättning i tredje ger till sist $xye^{xyz} - 2e^{y+2z} + 4e^{2z} = u'_z = xye^{xyz} - 2e^{y+2z} + g'(z) \Leftrightarrow g'(z) = 4e^{2z} \Leftrightarrow g(z) = 2e^{2z} + C$. Allmänna lösningen blir alltså $u = e^{xyz} + 3e^{2x-y} - e^x - e^{y+2z} + 2e^{2z} + C$ där $C$ är en godtycklig konstant.

1b) Kedjeregeln ger

$$xy^2 z'_x - x^3 z'_y = xy^2\left(f(x^3+y^3) + xf'(x^3+y^3)\cdot 3x^2\right) - x^3 \cdot xf'(x^3+y^3)\cdot 3y^2 = xy^2 f(x^3+y^3) = y^2 z,$$

vilket visar att $z = xf(x^3+y^3)$ är en lösning till ekvationen för alla $f \in \mathcal{C}^1$.

2) I en figur (Rita!) ser vi att det blir enklast att börja integrera m a p $x$. Detta ger ($I$ = sökt integral)

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\ln y}^{e^y} y\,dx\right) dy = \int_1^2 y(e^y - \ln y)dy = [ye^y]_1^2 - \int_1^2 e^y dy - \left[\frac{y^2}{2}\ln y\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{y}{2}dy = e^2 + \frac{3}{4} - 2\ln 2.$$

3) Insättning av parametriseringen i $S$:s ekvation ger $t^3+3t^2+3t-1 = 2t^3+5t^2+4t+1 \Leftrightarrow (t+2)(t^2+1) = 0$ så $t = -2$ är enda lösningen. Punkten $P : (-1,2,-3)$ är alltså den enda skärningspunkten. Då ytan $S$ beskrivs av $f(x,y,z) := x^3 - 3xy - xz = 2$ är alltså $\nabla f(-1,2,-3) = (0,3,1)$ normal till ytans tangentplan i $P$ som därför får ekvationen $3y + z = 3$. Kurvan $\Gamma$:s tangent i $P$ blir $(1,-3,4)$ och denna vektor är därför normal till det andra sökta planet, som därmed får ekvationen $x - 3y + 4z = -19$.

4) Byte till sfäriska koordinater ger ($I$ = sökt integral)

$$I = \int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{r^2\sin\theta}{r\sqrt{1+r\cos\theta}}d\varphi\right)d\theta\right)dr = \frac{\pi}{2}\int_1^3 \left[-2(1+r\cos\theta)^{1/2}\right]_0^{\pi/2} dr = \pi\int_1^3 ((1+r)^{1/2} - 1)dr$$

$$= \pi\left[\frac{2}{3}(1+r)^{3/2}\right]_1^3 - 2\pi = \frac{2}{3}\left(5 - 2\sqrt{2}\right)\pi.$$

5a) Se kursboken.

5b) Efter lite arbete får vi att $f(x,y) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{2x^2y^2 - 2x^2y - 12xy^2}{3x^2 + 12y^2}$. Byte till polära koordinater samt triangelolikheten ger då

$$\left|f(x,y) - \frac{5}{3}\right| \le \frac{|2x^2y^2 - 2x^2y - 12xy^2|}{3x^2+3y^2} = \frac{|2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 2\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi - 12\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi|}{3\rho^2}$$

$$\le \frac{2\rho^2}{3}\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \frac{2\rho}{3}\cos^2\varphi|\sin\varphi| + 4\rho\sin^2\varphi|\cos\varphi| \le \frac{2\rho^2+14\rho}{3} \to 0\,,\ \rho\to 0.$$

Enligt sats är alltså $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{5}{3}$ varför $f$ blir kontinuerlig i $(0,0)$ om vi sätter $f(0,0) = \dfrac{5}{3}$.

6) Sätt $u = x - y$, $v = 2y$ så att $dxdy = \dfrac{dudv}{2}$ och $D$ övergår till $E$ given av $u^2 + v^2 \leq 4$, $2u + v \geq 0$. Byter vi sedan till polära koordinater i $uv$-planet ser vi (Rita!) att $-\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ där $\alpha = \arctan 2$. I en rätvinklig triangel med kateter 1 och 2 (Rita!) ser vi sedan att $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$. Allt detta ger ($I =$ sökt integral)

$$I = \iint_E \left(\frac{v}{2}\right)^3 \frac{dudv}{2} = \frac{1}{16}\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha}\left(\int_0^2 \rho^3 \sin^3\varphi \cdot \rho\, d\rho\right) d\varphi = \frac{2}{5}\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha}\left(\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\varphi\right) d\varphi$$
$$= \frac{2}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_{-\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\right) = \frac{56}{75\sqrt{5}}.$$

7) Med det givna bytet fås $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = \dfrac{1}{x} z'_u$ och $z''_{xx} = \left(\dfrac{1}{x} z'_u\right)'_x = -\dfrac{1}{x^2} z'_u + \dfrac{1}{x}(z''_{uu}u'_x + z''_{uv}v'_x) = -\dfrac{1}{x^2} z'_u + \dfrac{1}{x^2} z''_{uu}$. Första ekvationen blir då $z''_{uu} - 3z'_u + 2z = 0$ d v s en andra ordningens linjär ekvation med konstanta koefficienter. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har lösningarna $r = 1$ och $r = 2$ så allmänna lösningen till första ekvationen blir $z = f(v)e^u + g(v)e^{2u} = xf(y) + x^2 g(y)$ där $f$ och $g$ är godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Vi söker nu de $f$ och $g$ som gör att även andra ekvationen är uppfylld och vi sätter därför in detta i andra ekvationen.

$$0 = x^2 z''_{xy} - (xz'_x - z)z'_x = x^2\left(f'(y) + 2xg'(y)\right) - \left(xf(y) + 2x^2 g(y) - xf(y) - x^2 g(y)\right)\left(f(y) + 2xg(y)\right)$$
$$= x^2\left(f'(y) - g(y)f(y)\right) + 2x^3\left(g'(y) - g(y)^2\right) \Leftrightarrow f'(y) - g(y)f(y) + 2x\left(g'(y) - g(y)^2\right) = 0.$$

Låt nu $x \to 0$ i denna ekvation samtidigt som, $y$ hålls fix. Det följer att $f'(y) - g(y)f(y) = 0$ vilket insatt i samma ekvation ger att $g'(y) - g(y)^2 = 0$.

Vi ser att $g(y) = 0$ är en lösning till andra ekvationen. För $g(y) \neq 0$ är ekvationen separabel: $g'(y) - g(y)^2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dy}\left(-\dfrac{1}{g(y)}\right) = 1 \Leftrightarrow g(y) = \dfrac{1}{A - y}$ där $A$ är en godtycklig konstant.

Återstår att lösa $f'(y) - g(y)f(y) = 0$. I fallet $g(y) = 0$ fås $f(y) = C =$ konstant och i fallet $g(y) = \dfrac{1}{A - y}$ är $A - y$ en integrerande faktor vilket ger $\dfrac{d}{dy}\left((A - y)f(y)\right) = (A - y)f'(y) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(y) = \dfrac{B}{A - y}$, $B$ konstant.

Lösningarna ges alltså av $z = Cx$ eller $z = \dfrac{x^2 + Bx}{A - y}$ för godtyckliga konstanter $A$, $B$ och $C$.