

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2018-03-15 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n - 1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1a) Lös systemet
$$\begin{cases} u'_x = yze^{xyz} + 6e^{2x-y} - e^x \\ u'_y = xze^{xyz} - 3e^{2x-y} - e^{y+2z} \\ u'_z = xye^{xyz} - 2e^{y+2z} + 4e^{2z} \end{cases} .$$

1b) Är $z = xf(x^3 + y^3)$ en lösning till $xy^2z'_x - x^3z'_y = y^2z$ för alla $f \in C^1$?

2) Låt D vara den begränsade mängd som begränsas av kurvorna $y = \ln x$, $y = e^x$, $y = 1$ och $y = 2$. Beräkna $\iint_D y \, dx dy$.

3) Låt Γ vara kurvan $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t + t^2 \\ z = 1 - t^2 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$ och låt ytan S ges av $x^3 - 2 = x(3y + z)$.

För alla skärningspunkter P mellan Γ och S , bestäm ekvationer för tangentplanet till S i P samt för ett plan som går genom P och är vinkelrätt mot Γ .

4) Beräkna $\iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{(1+z)(x^2+y^2+z^2)}}$ om D ges av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $x, y, z \geq 0$.

5a) Bevisa att f är kontinuerlig i (a, b) om f är differentierbar i (a, b) .

5b) Går det att definiera $f(0, 0)$ så att f blir kontinuerlig i $(0, 0)$ om

$$f(x, y) = \frac{(2x + 2y - xy)^2 + (x - 4y + xy)^2}{3x^2 + 12y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)?$$

6) Beräkna $\iint_D y^3 \, dx dy$ om D ges av $x^2 - 2xy + 5y^2 \leq 4$ och $x \geq 0$.

7) Finn alla lösningar $z = z(x, y) \in C^2$ till systemet $\begin{cases} x^2 z''_{xx} - 2xz'_x + 2z = 0 \\ x^2 z''_{xy} - (xz'_x - z)z'_x = 0 \end{cases}$ för $x > 0$. Använd t ex bytet $u = \ln x$, $v = y$ för att lösa första ekvationen.