LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson 2017-08-18

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2017-08-18

1) Sätt $u = 3x - y$, $v = x + y$ så är $y = \dfrac{3v - u}{4}$ och $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = 4$, d v s $dxdy = \dfrac{1}{4}dudv$ vilket ger (I =sökt integral):

$$I = \frac{1}{4}\int_0^8 \left(\int_0^4 e^{(3v-u)/4} dv\right) du = \frac{1}{3}\int_0^8 \left(e^{3-u/4} - e^{-u/4}\right) du = \frac{4}{3e^2}\left(e^5 - e^3 - e^2 + 1\right).$$

2) Kalla sökta punkten (a,b). Då är $\nabla f(a,b) = (2ab, a^2 + 3b^2)$ parallell med γ:s normallinje i (a,b). $\nabla f(a,b)$ ska då vara ortogonal mot normalvektorn till $L : 2x - y = 0$ vilket ger

$$0 = \nabla f(a,b) \cdot (2,-1) = 4ab - a^2 - 3b^2 = -(a-2b)^2 + b^2 \Leftrightarrow a = 2b \pm b.$$

Då (a,b) ligger på γ fås $9b^3 + b^3 = 10 \Leftrightarrow b = 1$ d v s $(a,b) = (3,1)$ resp. $b^3 + b^3 = 10 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{5}$ d v s $(a,b) = (\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$ och normallinjens ekvation i dessa punkter blir $y = 2x - 5$ resp. $y = 2x - \sqrt[3]{5}$.

3) Kedjeregeln ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 3x^2 z'_u + z'_v\,, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -3z'_u,$$

så den givna ekvationen övergår till $z'_v = 12y = 4v^3 - 4u$ så allmänna lösningen blir $z = v^4 - 4uv + f(u) = 12xy - 3x^4 + f(x^3 - 3y)$ där $f \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion.

Vi får $h(x,y) = 12x^2y - 3x^5 + xf(x^3 - 3y) \Rightarrow h'_x(x,y) = 24xy - 15x^4 + f(x^3 - 3y) + 3x^3 f'(x^3 - 3y)$. Givna villkoret ger $e^y = h'_x(0,y) = f(-3y) \Leftrightarrow f(t) = e^{-t/3} \Rightarrow z = 12xy - 3x^4 + e^{y - x^3/3}$.

4a) På linjen $y = x$ är $f_1(x,x) = \dfrac{3x^3 - x^2 - 2x^4}{2x^2 + x^2} = -\dfrac{1}{3} + x - \dfrac{2x^2}{3} \to -\dfrac{1}{3}$, $x \to 0$, men på y-axeln är $f_1(0,y) = 0 \to 0 \neq -\dfrac{1}{3}$, $y \to 0$. Första gränsvärdet existerar därför inte.

För att studera f_2, sätt $t = y + 1$ så att $(x,t) \to (0,0)$, $(x,y) \to (0,-1)$. Då är $f_2(x,y) = \dfrac{t^3 - x^3}{x^2 + t^2}$. Byte till polära koordinater i (x,t)-planet ger sedan

$$0 \le \left|\frac{t^3 - x^3}{x^2 + t^2}\right| = \left|\frac{\rho^3 \sin^3\varphi - \rho^3\cos^3\varphi}{\rho^2}\right| \le \rho\left(|\sin^3\varphi| + |\cos^3\varphi|\right) \le 2\rho \to 0,\ \rho \to 0,$$

där vi använt triangelolikheten i näst sista olikheten. Då ytterleden i dessa uppskattningar inte beror på φ ger instängningsregeln att $\displaystyle\lim_{(x,t)\to(0,0)} \frac{t^3 - x^3}{x^2 + t^2} = 0$ d v s att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f_2(x,y) = 0$.

4b) Betrakta

$$\frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \frac{\frac{3h^3 - h\cdot 0 - 2h^4}{2h^2 + \cdot 0^2} - 0}{h} = \frac{3}{2} - h \to \frac{3}{2}, h \to 0,$$

d v s $g'_x(0,0) = 3/2$ enligt definitionen av partiell derivata.

5) Med $D = \left\{(x,y); \dfrac{x}{4} \le y \le \sqrt[3]{x}, 0 \le x \le 8\right\}$ = /Rita!/ = $\{(x,y); y^3 \le x \le 4y, 0 \le y \le 2\}$ är (I = sökt integral)

$$I = \iint_D e^{y^2} dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y^3}^{4y} e^{y^2} dx\right) dy = \int_0^2 (4y - y^3)e^{y^2} dy = /t = y^2/ = \int_0^4 (4-t)e^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{e^4 - 5}{2}.$$

6a) Första ekvationen är ekvivalent med $f(x,y,z) = 2x^2(y+z)+g(y,z)$ där $g \in \mathcal{C}^1$ är godtycklig. Insättning i andra ekvationen ger $2x^2 + g'_y(y,z) = 2x^2 - z^2 - 2yz \Leftrightarrow g'_y(y,z) = -z^2 - 2yz \Leftrightarrow g(y,z) = -yz^2 - y^2z + h(z)$. Allmänna lösningen till systemet blir alltså $f(x,y,z) = 2x^2(y+z) - yz^2 - y^2z + h(z)$ där $h \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig funktion av en variabel.

6b) Tydligen är $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$. Då $f \in \mathcal{C}^1$ följer att $f'_{\bar{v}} = \nabla f \cdot \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-f'_y + f'_z)$ vilket ger

$$f'_z = f'_y + \sqrt{2} f'_{\bar{v}} = 2x^2 - z^2 - 2yz + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{y^2}{\sqrt{2}} \right) = 2x^2 - y^2 - 2yz - z^2.$$

Insättning av lösningen från 5a) ger $2x^2 - 2yz - y^2 + h'(z) = 2x^2 - y^2 - 2yz - z^2 \Leftrightarrow h'(z) = -z^2 \Leftrightarrow h(z) = -\frac{z^3}{3} + C$. De funktioner som uppfyller alla villkor är alltså $f(x,y,z) = 2x^2(y+z) - yz^2 - y^2z - \frac{z^3}{3} + C$, där C är en godtycklig konstant.

7) Kalla integranden $g(x,y)$. Då är

$$g(x,y) = \frac{e^{2\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2 \cdot \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} \sqrt{1 + \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}}$$

och då byte till polära koordinater ger

$$0 \le \left| \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} \right| = \rho |\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^2\varphi \cos\varphi| \le \rho \left(|\cos\varphi \sin^2\varphi| + |\sin\varphi \cos^2\varphi| \right) \le 2\rho \to 0\,,\ \rho \to 0$$

följer att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} = 0$ enligt instängningsregeln, ty ytterleden i uppskattningen beror inte på φ. Enligt standardgränsvärden från envariabelanalysen är då $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 2$.

Definiera nu en ny funktion f genom $f(x,y) = g(x,y)$ för $(x,y) \neq (0,0)$ samt $f(0,0) = 2$. Då är f kontinuerlig på $E_r = D_r \cup \{(0,0)\}$ och integralkalkylens medelvärdessats ger att det finns $(\xi,\eta) \in E_r$ så att

$$\frac{1}{r^2} \iint_{D_r} g(x,y) = \frac{1}{r^2} \iint_{E_r} f(x,y) = \frac{f(\xi,\eta)}{r^2} \iint_{E_r} dxdy = f(\xi,\eta) \cdot \pi \to 2\pi\,,\ r \to 0,$$

ty då $(\xi,\eta) \in E_r$ gäller att $(\xi,\eta) \to (0,0)\,,\ r \to 0$ (instängning) och därmed $f(\xi,\eta) \to 2\,,\ r \to 0$

Anmärkning: Observera att vi inte kan använda integralkalkylens medelvärdessats direkt på den givna integralen, ty D_r är ej en kompakt mängd. E_r *är* däremot kompakt och det går därför bra att använda medelvärdessatsen på E_r, *förutsatt att* integranden är kontinuerlig på E_r. Då den givna integranden inte är kontinuerlig i origo (den är ju inte ens definierad där) måste vi först hitta ett värde på integranden som gör denna kontinuerlig i origo, och först därefter är det fritt fram att använda medelvärdessatsen.