LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Kurskod: TATA76
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2017-08-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n-1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Beräkna $\displaystyle\iint_D e^y\,dxdy$ om D är fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,1)$ och $(2,-2)$.

2) Låt $\gamma : x^2y + y^3 = 10$. I vilka punkter på γ är normallinjen till γ parallell med linjen $L : y = 2x$? Ange också en ekvation för normallinjen till γ i dessa punkter.

3) Finn alla $z(x,y) \in \mathcal{C}^1$ som uppfyller $z'_x + x^2 z'_y = 12y$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, t ex genom att byta till variablerna $u = x^3 - 3y$, $v = x$, och bilda sedan $h(x,y) = x\,z(x,y)$.
Beräkna $h'_x(x,y)$. Vad blir z om $h'_x(0,y) = e^y$?

4a) Låt $f_1(x,y) = \dfrac{3x^3 - xy - 2x^4}{2x^2 + y^2}$ och $f_2(x,y) = \dfrac{y^3 - x^3 + 3y^2 + 3y + 1}{1 + 2y + x^2 + y^2}$.
Undersök $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$ och $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f_2(x,y)$.

4b) Beräkna $g'_x(0,0)$ där $g(x,y) = f_1(x,y)$ för $(x,y) \neq (0,0)$ och $g(0,0) = 0$, om denna derivata existerar (här är f_1 samma f_1 som i 4a)).

5) Beräkna $\displaystyle\int_0^8 \left(\int_{x/4}^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2}\,dy \right) dx.$

6a) Lös systemet $\begin{cases} f'_x = 4x(y+z) \\ f'_y = 2x^2 - z^2 - 2yz \end{cases}$ där $f(x,y,z) \in \mathcal{C}^1$.

6b) Låt $\bar{v}$ vara en enhetsvektor parallell med yz-planet som bildar vinkeln $\pi/4$ med både positiva z-axeln och negativa y-axeln. Finn alla $f(x,y,z) \in \mathcal{C}^1$ som löser systemet i 6a) och dessutom uppfyller villkoret $f'_{\bar{v}} = -\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}$.

7) D_r är cirkeln med centrum i origo och radie r, från vilken origo tagits bort. Beräkna

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} \frac{e^{2\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sin(x^2+y^2)} \sqrt{x^2 + y^2 + xy(x-y)}\,dxdy.$$