LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson 2017-03-16

Svar m m till tentamen i TATA76 Flervariabelanalys 2017-03-16

1) Vi ser att $P:(0,0,2)$ är enda möjligheten. $\nabla f(0,0,2)=4(\sqrt{2},1,3)=:4\bar{n}$ är då enligt sats normal till S i P. Normallinjen L ges därför av $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\\3\end{bmatrix}$ medan tangentplanet Π får ekvationen $\sqrt{2}x+y+3z=6$.

Enhetsvektorn som pekar från P i riktning mot $(0,1,-1)$ ges av $\bar{v}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(0,1,-3)$ så sökta riktningsderivatan blir $f'_{\bar{v}}(0,0,2)=\nabla f(0,0,2)\cdot\bar{v}=-\dfrac{32}{\sqrt{10}}$.

2) Sätt $u=2x+y$, $v=x-3y$ så fås $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}=-7$, så att $dxdy=\dfrac{1}{7}dudv$, samt $x=\dfrac{3u+v}{7}$, $y=\dfrac{u-2v}{7}$. Detta ger (I = sökt integral)

$$I=\int_1^2\left(\int_1^v(-2u-v)\cdot\frac{1}{7}du\right)dv=-\frac{1}{7}\int_1^2\left[u^2+uv\right]_1^v dv=-\frac{1}{7}\left[\frac{2v^3}{3}-\frac{v^2}{2}-v\right]_1^2=-\frac{13}{42}.$$

3a) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xy\frac{\partial z}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x^2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Insättning i den givna ekvationen ger

$$xy=x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y\frac{\partial z}{\partial u}-2x^2y\frac{\partial z}{\partial u}-2y\frac{\partial z}{\partial v}=-2y\frac{\partial z}{\partial v}\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}},$$

med allmän lösning $z=-\sqrt{uv}+g(u)=-xy+g(x^2y)$ där $g\in\mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion. Givna villkoret ger $x^2=z(x,1)=-x+g(x^2)\Leftrightarrow g(t)=t+\sqrt{t}$ d v s $z=x^2y-xy+x\sqrt{y}$.

3b) Kedjeregeln och produktregeln ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\frac{\partial f}{\partial u}\right)=2y\frac{\partial f}{\partial u}+2xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=2y\frac{\partial f}{\partial u}+2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2y\frac{\partial f}{\partial u}+4x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}.$$

4) I en omsorgsfullt ritad figur ser vi att byte till polära koordinater ger (I = sökt integral)

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\pi/4}^0\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{2+\rho^4}\rho\,d\varphi\right)d\rho=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{2+\rho^4}\left(\int_{-\pi/4}^0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi\right)d\rho$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\rho^3}{2+\rho^4}\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{-\pi/4}^0 d\rho=\frac{\pi+2}{8}\left[\frac{1}{4}\ln\left(2+\rho^4\right)\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{(\pi+2)\ln 2}{32}.$$

5ab) Se kursboken.

5c) Tydligen är $V=\dfrac{kT}{p}$. Detta ger

$$dV=\frac{\partial V}{\partial p}dp+\frac{\partial V}{\partial T}dT=-\frac{kT}{p^2}dp+\frac{k}{p}dT=-\frac{kT}{p^2}\cdot(-0.03p)+\frac{k}{p}\cdot 0.01T=0.04\frac{kT}{p}=0.04V,$$

d v s gasens volym ökar med ca 4% (exakta värdet blir 4.12...%).

6) I sfäriska koordinater är $x^2+y^2 \geq 3z^2 \Leftrightarrow r^2\sin^2\theta \geq 3r^2\cos^2\theta \Leftrightarrow \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$ (ty $0 \leq \theta \leq \pi$). Byte till sfäriska koordinater ger därför ($I =$ sökt integral):

$$I = \int_0^{\pi/3}\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} 3r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, d\varphi\right)dr\right)d\theta + \int_{\pi/3}^{2\pi/3}\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, d\varphi\right)dr\right)d\theta$$
$$+ \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} 3r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, d\varphi\right)dr\right)d\theta$$
$$= \frac{6\pi}{5}\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \frac{2\pi}{5}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta + \frac{6\pi}{5}\int_{2\pi/3}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$
$$= \frac{6\pi}{5}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/3} + \frac{2\pi}{5}\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} + \frac{6\pi}{5}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{7\pi}{20}+\frac{11\pi}{30}+\frac{7\pi}{20} = \frac{16\pi}{15}.$$

Anm: Första integralen är $\iiint\limits_{D_1} 3z^2\,dxdydz$ och den tredje integralen är $\iiint\limits_{D_2} 3z^2\,dxdydz$ där (Rita!) D_1 och D_2 är den del av övre resp. undre halvan av dubbelkonen $3z^2 \geq x^2+y^2$ som ligger i enhetsklotet.

Räkningarna ovan kan förenklas om man observerar att integranden är en jämn funktion av z samtidigt som D_1 och D_2 är varandras spegelbilder i xy-planet. Det följer alltså direkt att dessa två integraler måste vara lika.

7) Då z endast beror på $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ i ekvationen för båda ytorna är problemet helt rotationssymmetriskt kring z-axeln. Det räcker därför att undersöka plan som tangerar S_1 i en punkt i den del av yz-planet där $y \geq 0$, d v s i punkter P_a av formen $P_a : (0, a, 1+a^4)$ för $a \geq 0$. Sätt $f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - z$ så att $f(x,y,z) = -1$ på S_1. Då är $\nabla f(0,a,1+a^4) = (0, 4a^3, -1)$ en normal till tangentplanet till S_1 i P_a som därför får ekvationen $4a^3y - z = 3a^4 - 1$.

Mängden D ges därför av olikheterna $x^2+y^2 \leq z \leq 4a^3y - 3a^4 + 1$ och D:s projektion i xy-planet blir (Rita!) $E : x^2+y^2 \leq 4a^3y - 3a^4 + 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-2a^3)^2 \leq 4a^6 - 3a^4 + 1 =: g(a)$. Vi noterar här att $g'(a) = 12a^3(2a^2-1)$ så $g'(a) < 0$ för $0 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g'(a) > 0$ för $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $g'(0) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Då dessutom $g(a) \to \infty, a \to \infty$ följer att $g(a)$ kan anta alla värden $\geq g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}$.

Volymen V av D ges nu av (använder stavar i z-led)

$$V = \iiint\limits_D dxdydz = \iint\limits_E \left(g(a) - x^2 - (y-2a^3)^2\right)\,dxdy = \Big/ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = 2a^3 + \rho\sin\varphi \end{array} \Big/$$
$$= \int_0^{\sqrt{g(a)}}\left(\int_0^{2\pi}\left(g(a)-\rho^2\right)\rho\,d\varphi\right)d\rho = 2\pi\left[g(a)\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{g(a)}} = \frac{\pi}{2}g(a)^2,$$

och då $g(a)$ enligt ovan kan anta alla värden $\geq \frac{3}{4}$ följer att V kan anta alla värden i intervallet $\left[\frac{9\pi}{32}, \infty\right[$.