

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2017-03-16 kl 14–19

Inga hjälpmedel är tillåtna (penna, radergummi, linjal, passare och gradskiva *får* användas).

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n - 1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

- 1) Låt ytan S ges av $f(x, y, z) = xy + 4x\sqrt{z} + yz^2 + z^3 = 8$ och antag att S skär z -axeln i punkten P . Ange ekvationer för tangentplanet Π och normallinjen L till S i P .
Bestäm också riktningensderivatan av f i P i riktningen från P mot $(0, 1, -1)$.
- 2) Beräkna $\iint_D (y - 5x) dx dy$ om D ges av olikheterna $1 \leq 2x + y \leq x - 3y \leq 2$.
- 3a) Lös ekvationen $x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, $x, y > 0$ där $z(x, y) \in \mathcal{C}^2$, t ex genom att byta till variablerna $u = x^2 y$, $v = y$. Bestäm också den/de lösningar som uppfyller $z(x, 1) = x^2$.
- 3b) Uttryck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i derivator med avseende på $u = x^2 y$ och $v = y$ om $f(x, y) \in \mathcal{C}^2$.
- 4) Beräkna $\iint_D \frac{x^2}{2 + (x^2 + y^2)^2} dx dy$ om $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x + y \geq 0, y \leq 0\}$.
- 5a) Definiera vad det betyder att $f(x, y)$ är differentierbar i punkten $(1, 2)$.
- 5b) Definiera differentialen dg av en funktion $g(x, y)$.
- 5c) Låt p vara trycket, T absoluta temperaturen och V volymen hos en ideal gas. Enligt allmänna gaslagen är $\frac{pV}{T} = k = \text{konstant}$.
Använd differentiering för att skatta hur mycket volymen förändras om trycket minskar med 3% och absoluta temperaturen ökar med 1%.
- 6) Beräkna $\iiint_D \max(x^2 + y^2, 3z^2) dx dy dz$ där $\max(a, b) = \text{det största av talen } a \text{ och } b$ och D är enhetsklotet.
- 7) Låt Π vara ett godtyckligt tangentplan till ytan $S_1 : (x^2 + y^2)^2 = z - 1$ och låt D vara det begränsade området mellan Π och ytan $S_2 : z = x^2 + y^2$. Bestäm alla värden som volymen av D kan anta.