LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

2016-08-19

Svar m m till tentamen i TATA76/9GMA06 Flervariabelanalys 2016-08-19

1) De givna parablerna kan skrivas $x = 4 - (y-2)^2$ och $x = (y-1)^2 - 1$ och de skär varandra i $(0,0)$ och $(3,3)$. En figur ger sedan (I = sökt integral)

$$I = \int_0^3 \left(\int_{y^2-2y}^{4y-y^2} y\,dx \right) dy = \int_0^3 (6y^2 - 2y^3)\,dy = \frac{27}{2}.$$

2) Som i kursen i linjär algebra ser vi att vektorn $\bar{n} = (3,-1,2)$ är normal till Π. $\bar{n}$ är därför parallell med vektorn $\nabla f(1,1,1) = 2(A,B,C)$ (där $f(x,y,z) = Ax^2+By^2+Cz^2 = 1$ på S) varför $\bar{0} = \bar{n}\times(A,B,C) = (-2B-C, 2A-3C, A+3B) \Leftrightarrow A = -3B$ och $C = -2B$ (mittenekvationen är då identiskt uppfylld). Att $(1,1,1)$ ligger på S ger sedan ekvationen $A+B+C=1$ varur $(A,B,C) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ och ytan $S: \frac{3x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ är en enmantlad hyperboloid med y-axeln som symmetriaxel.

3) En figur, samt byte till polära koordinater ger (I = sökt integral)

$$I = \int_0^{\arctan 3} \left(\int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \cos^3\varphi \cdot \rho\,d\varphi \right) d\rho = 20\sqrt{10} \int_0^{\arctan 3} \left(1 - \sin^2\varphi\right)\cos\varphi\,d\varphi = 60 - 18 = 42,$$

där vi använt att $\sin(\arctan 3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ vilket fås ur en rätvinklig triangel.

4) Förenkling ger att $f(x,y) = 5 + \frac{x^3-y^3}{x^2+9y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$ så på x-axeln är $f(x,0) = 5+x \to 5\,,\ x \to 0$. Byte till polära koordinater samt triangelolikheten ger

$$\begin{aligned} 0 \le |f(x,y) - 5| &= \frac{|x^3-y^3|}{x^2+9y^2} \le \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|\rho^3\cos^3\varphi - \rho^3\sin^3\varphi|}{\rho^2} \\ &\le \rho\left(|\cos^3\varphi| + |\sin^3\varphi|\right) \le 2\rho \to 0\,,\ \rho \to 0. \end{aligned}$$

Ytterleden i denna olikhet beror ej på φ så instängning ger $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 5$. Med $f(0,0) = 5$ blir f alltså kontinuerlig i $(0,0)$, enligt definitionen av kontinuitet. Definitionen av partiell derivata ger

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{5 + \frac{0^3-k^3}{0^2+9\cdot k^2} - 5}{k} = \lim_{k\to 0}\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9}.$$

5) Om $u \in \mathcal{C}^2$ är en lösning är $\left((ay-1)e^x + (5a+1)ye^{a^2x}\right)'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = \left(ae^x + e^{ay} + (9a-3)e^{a^2x}\right)'_x \Leftrightarrow$ $0 = (9a^3 - 3a^2 - 5a - 1)e^{a^2x} = (a-1)(3a+1)^2 e^{a^2x}$ d v s $a = 1$ eller $a = -1/3$.

För $a = 1$ fås ekvationerna $u'_x = (7y-1)e^x$ och $u'_y = 7e^x + e^y$. Den andra av dessa är ekvivalent med att $u = 7ye^x + e^y + f(x)$ för godtyckligt f. Om detta sätts in i första ekvationen fås $7ye^x + f'(x) = (7y-1)e^x \Leftrightarrow f'(x) = -e^x \Leftrightarrow f(x) = -e^x + C$ där C är en godtycklig konstant.

För $a = -1/3$ fås $u'_x = \left(-\frac{y}{3} - 1\right)e^x - \frac{2y}{3}e^{x/9}$, $u'_y = e^{-y/3} - \frac{e^x}{3} - 6e^{x/9}$ som löses på samma sätt.

För $a = 1$ har alltså systemet lösningarna $u = (7y-1)e^x + e^y + C$ och för $a = -1/3$ har systemet lösningarna $u = \left(-\frac{y}{3} - 1\right)e^x - 6ye^{x/9} - 3e^{-y/3} + D$ där C, D är godtyckliga konstanter. Om $a \neq 1$ och $a \neq -1/3$ saknar systemet lösning

6) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Kedjeregeln och produktregeln tillsammans ger sedan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 6y\frac{\partial z}{\partial u} + 3y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 6y\frac{\partial z}{\partial u} + 3y^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 6y\frac{\partial z}{\partial u} + 9y^4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

På samma sätt fås (ty $z \in \mathcal{C}^2$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Insättning vänsterledet ger $9y^5\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 6y^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 9y^5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ så vi får ekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{1}{9y^2} = \frac{1}{9}(u-v)^{-2/3} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{3}(u-v)^{1/3} + f(u) \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}(u-v)^{4/3} + vf(u) + g(u),$$

d v s $z = \frac{y^4}{4} + xf(x+y^3) + g(x+y^3)$ där $f, g \in \mathcal{C}^2$ är godtyckliga envariabelfunktioner.

Det givna villkoret ger $0 = z(0,y) = \frac{y^4}{4} + g(y^3) \Leftrightarrow g(t) = -\frac{t^{4/3}}{4}$. De sökta lösningarna ges därför av

$$z = \frac{y^4 - (x+y^3)^{4/3}}{4} + xf(x+y^3),$$

där $f \in \mathcal{C}^2$ är en godtycklig envariabelfunktion.

7) I sfäriska koordinater blir den givna olikheten $r^2\cdot\left(r^2 + (a-1)r^2\cos^2\theta\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow r \leq \left(1 + (a-1)\cos^2\theta\right)^{-1/3}$.

Vi ser att om $a = 1$ så fås $r \leq 1$ d v s D_1 är enhetsklotet, så $V(1) = \frac{4\pi}{3}$. Om $a \neq 1$ sätter vi $b = a - 1 \neq 0$. Byte till sfäriska koordinater ger nu

$$V(a) = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\left(1+b\cos^2\theta\right)^{-1/3}}\left(\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\varphi\right)dr\right)d\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\left(1+b\cos^2\theta\right)^{-1/3}}d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{1+b\cos^2\theta}d\theta = /\text{Bytet } t = \cos\theta \text{ ger jämn integrand}/ = \frac{4\pi}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+bt^2}.$$

Här ser vi att vi måste dela upp i två fall. För $b > 0$ fås

$$V(a) = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\left(\sqrt{b}t\right)\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\sqrt{b}.$$

För $b < 0$ sätter vi $c = -b$ (så att $0 < c < 1$) och får, efter en partialbråksuppdelning, att

$$V(a) = \frac{4\pi}{3}\int_0^1\frac{dt}{1-ct^2} = \frac{2\pi}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+\sqrt{c}t} + \frac{1}{1-\sqrt{c}t}\right)dt = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{c}t}{1-\sqrt{c}t}\right)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{c}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right).$$

Sammanfattningsvis är alltså $V(a) = \frac{2\pi}{3\sqrt{1-a}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}\right)$ om $0 < a < 1$, $V(a) = \frac{4\pi}{3}$ om $a = 1$ och $V(a) = \frac{4\pi}{3\sqrt{a-1}}\arctan\sqrt{a-1}$ om $a > 1$.