LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Kurskod: TATA76
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2016-08-19 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n-1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Beräkna $\iint_D y\,dxdy$ om D är det begränsade området mellan kurvorna $y^2 = 4y - x$ och $y^2 = 2y + x$.

2) Bestäm konstanterna A, B och C så att planet Π genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$ och $(0, 0, 2)$ tangerar ytan $S : Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$.

   Skissera också ytan S i ett koordinatsystem. Vad är det för slags yta?

3) Beräkna $\iint_D x^3\,dxdy$ om $D = \big\{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 10\,,\ 0 \leq y \leq 3x\big\}$.

4) Låt $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3 + (x + 6y)^2 + (2x - 3y)^2}{x^2 + 9y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$.

   Går det att definiera $f(0, 0)$ så att f blir kontinuerlig i $(0, 0)$? Beräkna i så fall också (om möjligt) $f'_y(0, 0)$ för detta värde på $f(0, 0)$.

5) Lös systemet $\begin{cases} u'_x &= (ay - 1)e^x + (5a + 1)ye^{a^2x} \\ u'_y &= ae^x + (9a - 3)e^{a^2x} + e^{ay} \end{cases}$ för alla värden på konstanten a, där $u = u(x, y) \in \mathcal{C}^2$.

6) Lös den partiella differentialekvationen $9y^5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 6y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^3$ för $y > 0$ där $z = z(x, y) \in \mathcal{C}^2$, t ex genom att byta till variablerna $u = x + y^3$, $v = x$.

   Finn också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z(0, y) = 0$.

7) Beräkna volymen $V(a)$ av mängden $D_a = \big\{(x, y, z)\,;\ (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + az^2)^2 \leq 1\big\}$ för alla värden på konstanten $a > 0$.