LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson 2016-06-07

## Svar m m till tentamen i TATA76/9GMA06 Flervariabelanalys 2016-06-07

1) Enligt kedjeregeln är

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 3x^2 z'_u \ , \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -3y^2 z'_u + z'_v.$$

Detta ger att $y^2 z'_x + x^2 z'_y = 3x^2y^2 z'_u - 3x^2y^2 z'_u + x^2 z'_v = x^2 z'_v$ d v s den givna ekvationen är ekvivalent med $z'_v = y^2 \cos y^3 = v^2 \cos v^3 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}\sin v^3 + f(u)$, så allmänna lösningen är $z = \frac{1}{3}\sin y^3 + f\left(x^3 - y^3\right)$ där $f \in \mathcal{C}^1$ är en godtycklig envariabelfunktion.

Givna villkoret ger $0 = z(x, 2x) = \frac{1}{3}\sin 8x^3 + f\left(x^3 - 8x^3\right) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{8t}{7}\right)$ så sökta partikulärlösningen är $z = \frac{1}{3}\left(\sin y^3 + \sin\left(\frac{8(x^3-y^3)}{7}\right)\right)$.

2) Sätt $u = x + 3y\,,\ v = x - 4y \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}(4u + 3v)\,,\ y = \frac{1}{7}(u - v)$, $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = -7$ d v s $dxdy = \frac{1}{7}dudv$ och $D$ övergår till en axelparallell rektangel given av $0 \le u \le 7$, $-7 \le v \le 0$. Detta ger ($I$ = sökt integral)

$$I = \int_0^7 \left( \int_{-7}^0 \frac{1}{7}(-u + 8v)\cdot\frac{1}{7}dv \right) du = -\frac{1}{7}\int_0^7 (u + 28)du = -\frac{63}{2}.$$

3a) Se kursboken.

3b) Om $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$ är $f(x,0) = 1$ för $x \neq 0$ men $f(x,x) = 2/3 \neq 1$ för $x \neq 0$. Det första gränsvärdet existerar alltså inte. I andra uttrycket ger polära koordinater samt triangelolikheten att

$$\begin{aligned} 0 &\le \left|\frac{x^3 - 3xy^2 - y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^3\cos^3\varphi - 3\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi - \rho^3\sin^3\varphi}{\rho^2}\right| = \rho|\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \sin^3\varphi| \\ &\le \rho\left(|\cos^3\varphi| + 3|\cos\varphi\sin^2\varphi| + |\sin^3\varphi|\right) \le 5\rho \to 0\,,\ \rho \to 0. \end{aligned}$$

Då ytterleden i denna olikhet inte beror på $\varphi$ ger instängning att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - 3xy^2 - y^3}{x^2+y^2} = 0$.

4) Olikheterna kan skrivas $(x-2)^2 + (y+1)^2 \le 2$ resp. $0 \le x - 2 \le y + 1$ så ett variabelbyte $u = x - 2$, $v = y + 1$ ger området $E = \left\{(u,v)\,;\, u^2 + v^2 \le 2\,,\ 0 \le u \le v\right\}$. Byte till polära koordinater i $(u,v)$-planet ger sedan ($I$ = sökt integral)

$$\begin{aligned} I &= \iint_E (u+2)^2\,dudv = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^2\cos^2\varphi + 4\rho\cos\varphi + 4\right)\cdot\rho\,d\rho\right)d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{8\sqrt{2}}{3}\cos\varphi + \frac{9}{2}\right)d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{8\sqrt{2}}{3}\sin\varphi + \frac{9}{2}\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{9\pi}{8} - \frac{35}{12} + \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

5) Låt $(a,b,c)$ vara tangeringspunkten. Då är $\nabla f(a,b,c)$, där $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + kz^2$, en normal till det givna planet vilket ger $\bar{0} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 2kc \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3b - kc \\ kc - 3a \\ a - b \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = \frac{k}{3}c$. Då denna punkt måste ligga i $\Pi$ fås $\frac{k}{3}c + \frac{k}{3}c + 3c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{6}{2k+9}$. Då $(a,b,c)$ också ligger på $S$ fås $1 = a^2 + b^2 + kc^2 = \frac{8k^2 + 36k}{(2k+9)^2} = \frac{4k}{2k+9} \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$.

Enda möjligheten för $\Pi$ att tangera $S$ är alltså om $k = \frac{9}{2}$. Tangeringspunkten blir då $(1/2, 1/2, 1/3)$.

6) M h a byte till sfäriska koordinater fås att

$$\iiint\limits_{D_a} z\,dxdydz = \int\limits_a^1 \left( \int\limits_0^{\pi/2} \left( \int\limits_0^{2\pi} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta d\varphi \right) d\theta \right) dr = 2\pi \int\limits_a^1 r^3 \left[ \frac{1}{2}\sin^2\theta \right]_0^{\pi/2} dr = \frac{\pi}{4}(1-a^4)$$

och då $\mu(D_a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{2\pi}{3}(1-a^3)$ ser vi att $z_T = \frac{3}{8}\cdot\frac{1-a^4}{1-a^3}$.

Här ser vi genast att $z_T \to \frac{3}{8}$, $a \to 0$. För att se vad som händer då $a \to 1$ gör vi omskrivningen

$$z_T = \frac{3}{8}\cdot\frac{1-a^4}{1-a^3} = \frac{3}{8}\cdot\frac{(1-a)(1+a+a^2+a^3)}{(1-a)(1+a+a^2)} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1+a+a^2+a^3}{1+a+a^2} \to \frac{1}{2}\,,\ a \to 1.$$

7) Vi observerar först att $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\rho}$ och på samma sätt $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$. Detta samt produktregeln och kedjeregeln ger sedan att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z\left( f(\rho) + xf'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} \right) = z\left( \frac{x^2}{\rho}f'(\rho) + f(\rho) \right)$$

vilket ger

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z\left( \frac{2x}{\rho}f'(\rho) - \frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}f'(\rho) + \frac{x^2}{\rho}f''(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} + f'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} \right) = xz\left( \frac{x^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left( \frac{3}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} \right) f'(\rho) \right).$$

Vidare är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{xyz}{\rho}f'(\rho) \right) = xz\left( \frac{1}{\rho}f'(\rho) - \frac{y}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}f'(\rho) + \frac{y}{\rho}f''(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y} \right) = xz\left( \frac{y^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3} \right) f'(\rho) \right)$$

och $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Insättning i ekvationen ger nu

$$xz\left( \frac{x^2+y^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left( \frac{4}{\rho} - \frac{x^2+y^2}{\rho^3} \right) f'(\rho) \right) = 0 \Leftrightarrow f''(\rho) + \frac{3}{\rho}f'(\rho) = 0.$$

Sätt $g(\rho) = f'(\rho)$ och förläng med den integrerande faktorn $\rho^3$ så fås

$$\left(\rho^3 g(\rho)\right)' = \rho^3 g'(\rho) + 3\rho^2 g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) = g(\rho) = \frac{C}{\rho^3} \Leftrightarrow /C = -2A/ \Leftrightarrow f(\rho) = \frac{A}{\rho^2} + B$$

där $A$ och $B$ är godtyckliga konstanter.

Alla harmoniska funktioner på den givna formen ges alltså av $u = \frac{Axz}{x^2+y^2} + Bxz$.