LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Kurskod: TATA76
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA76 Flervariabelanalys

2016-06-07 kl 14–19

Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. För betyget n räcker n godkända uppgifter, d v s uppgifter bedömda med minst 2 poäng, samt totalt $3n - 1$ poäng där $n = 3, 4, 5$.

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa. För full poäng krävs att lösningarna är fullständiga, väl motiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar som är förenklat så långt det är möjligt.

Lycka till!

1) Lös differentialekvationen $y^2 z'_x + x^2 z'_y = x^2 y^2 \cos y^3$ för $x, y > 0$, där $z = z(x, y) \in \mathcal{C}^1$, t ex genom att byta till variablerna $u = x^3 - y^3$, $v = y$.

   Finn också speciellt den/de lösningar som uppfyller $z(x, 2x) = 0$.

2) Bestäm $\displaystyle\iint_D (x - 5y)\,dxdy$ om fyrhörningen D har hörn i $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 1)$ och $(4, 1)$.

3a) Definiera vad det betyder att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = 17$.

3b) Undersök gränsvärdena $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ och $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 3xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$.

4) Beräkna $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ om $D = \big\{(x, y);\, x^2 + y^2 \le 4x - 2y - 3\,,\ 2 \le x \le y + 3\big\}$.

5) Bestäm alla värden på konstanten k sådana att planet $\Pi : x + y + 3z = 2$ tangerar ytan $S : x^2 + y^2 + kz^2 = 1$. Avgör också i vilken/vilka punkter Π tangerar S.

6) Låt D vara övre halvan av enhetsklotet i $\mathbf{R}^3$. Låt sedan D_a vara den kropp som erhålls genom att övre halvan av ett klot med centrum i origo och radie a, där $0 < a < 1$ skärs bort från D. z-koordinaten för D_a:s tyngdpunkt, z_T, kan beräknas med formeln

$$z_T = \frac{1}{\mu(D_a)} \iiint_{D_a} z\,dxdydz\,, \text{ där } \mu(D_a) = \text{volymen av } D_a.$$

   Gör detta, och avgör speciellt vad som händer i ytterlighetsfallen $a \to 0$ och $a \to 1$.

7) En funktion $u = u(x, y, z) \in \mathcal{C}^2$ sägs vara *harmonisk* om

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

   Finn alla harmoniska funktioner på formen $u = xzf(\rho)$ där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $f \in \mathcal{C}^2$ är en envariabelfunktion.