LINKÖPINGS UNIVERSITET 2016-03-16
Matematiska institutionen
Fredrik Andersson

Svar m m till tentamen i TATA76/9GMA06 Flervariabelanalys 2016-03-16

1) Med bytet $u = x + y$, $v = x - y$, $w = 3x + y + z$ övergår D till $E = \{(u, v, w); 0 \le u \le v \le w \le 1\}$ och då $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = -2$, d v s $dxdydz = \left|-\dfrac{1}{2}\right| dudvdw = \dfrac{1}{2} dudvdw$ fås (I = sökt integral)

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^w \left(\int_0^v \frac{1}{2}(u - v)\frac{1}{2} du \right) dv \right) dw = -\frac{1}{8} \int_0^1 \left(\int_0^w v^2 dv \right) dw = -\frac{1}{24} \int_0^1 w^3 dw = -\frac{1}{96}.$$

2) Första ekvationen ger $u = x^2y^2z + f(y, z)$ för något $f(y, z)$. Insättning i andra ekvationen ger $2x^2yz + f'_y(y, z) = 2x^2yz - 2z^2 - 4y \Leftrightarrow f'_y(y, z) = -2z^2 - 4y \Leftrightarrow f(y, z) = -2yz^2 - 2y^2 + g(z)$ för något $g(z)$. Insättning i tredje ekvationen ger slutligen $x^2y^2 - 4yz + g'(z) = x^2y^2 - 4yz + 6z \Leftrightarrow g'(z) = 6z \Leftrightarrow g(z) = 3z^2 + C$. Alla lösningar är alltså $u = x^2y^2z - 2yz^2 - 2y^2 + 3z^2 + C$ där C är en godtycklig konstant.

Systemet ger $\nabla u(1, 1, 1) = (2, -4, 3)$ så $u'_{\bar{v}}(1, 1, 1) = \nabla u(1, 1, 1) \cdot \bar{v} = (2, -4, 3) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) = 2\sqrt{6}$.

3) $x + 2y = 12 \Leftrightarrow x = 12 - 2y$ som är en strängt avtagande funktion av y medan $x = y^3$ är en strängt växande funktion av y. Dessa kurvor har alltså högst en skärningspunkt och eftersom de skär varandra i $(8, 2)$ är detta alltså den enda skärningspunkten. En figur (Rita!) ger sedan att (I = sökt integral)

$$I = \int_1^2 \left(\int_{y^3}^{12-2y} \ln y \, dx \right) dy = \int_1^2 \left(12 - 2y - y^3\right) \ln y \, dy = \left[\left(12y - y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \ln y \right]_1^2 - \int_1^2 \left(12 - y - \frac{y^3}{4} \right) dy$$

$$= 16 \ln 2 - \left[12y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16} \right]_1^2 = 16 \ln 2 - \frac{153}{16}.$$

4) Sätt $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = 2$ på Γ. Då $\nabla f(2, 1) = (9, -12) = 3(3, -4)$ ges L av ekvationen $3x - 4y = 2$. För $P : (a, b)$ ska gälla att $\nabla f(a, b)$ är ortogonal mot $(3, -4)$ vilket ger ekvationen

$$0 = \nabla f(a, b) \cdot (3, -4) = 9a^2 - 9b^2 + 24ab \Leftrightarrow 0 = a^2 + \frac{8}{3}ab - b^2 = \left(a + \frac{4}{3}b \right)^2 - \frac{25}{9}b^2 \Leftrightarrow a = -3b \text{ eller } b = 3a.$$

$a = -3b$ insatt i ekvationen för Γ ger $2 = -27b^3 + 9b^3 \Leftrightarrow b = -9^{-1/3} \Rightarrow a = 3 \cdot 9^{-1/3}$. Tangentlinjen till Γ i $P : \left(3 \cdot 9^{-1/3}, -9^{-1/3}\right)$ blir $4x + 3y = 9 \cdot 9^{-1/3} = 9^{2/3} = \sqrt[3]{81}$ ty $(4, 3)$ är en normal enl. ovan.

Fallet $b = 3a$ ger $2 = a^3 - 27a^3 \Leftrightarrow a = -13^{-1/3} \Rightarrow b = -3 \cdot 13^{-1/3}$. Tangentlinjen till Γ i P : $\left(-13^{-1/3}, -3 \cdot 13^{-1/3}\right)$ blir $4x + 3y = -13 \cdot 13^{-1/3} = -13^{2/3} = -\sqrt[3]{169}$.

5) Sätt $u = x - 2y$, $v = y$ så är $dxdy = dudv$ och vi får mängden E given av $u^2 + v^2 \le 2$ och $u \ge -v$. Polära koordinater i $(u, v)-$planet ger (Rita!) $0 \le \rho \le \sqrt{2}$ och $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}$ d v s (I = sökt integral)

$$I = \iint_E \left((u + 2v)^2 + 3v\right) dudv = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi) d\varphi + 3\rho^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi \right) d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 \left[\frac{5}{2}\varphi + 2 \sin^2 \varphi - \frac{3}{4} \sin 2\varphi \right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} + 3\rho^2 \left[-\cos \varphi \right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} \right) d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{5\pi}{2}\rho^3 + 3\sqrt{2}\rho^2 \right) d\rho = \frac{5\pi}{2} + 4.$$

6) Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Kedjeregeln och produktregeln tillsammans ger sedan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial z}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

eftersom $z \in \mathcal{C}^2$. På samma sätt fås

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Insättning vänsterledet ger $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ så vi får ekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = x^2 e^y = (u-v)e^v \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = (u-v+1)e^v + f(u) \Leftrightarrow z = (u-v+2)e^v + vf(u) + g(u),$$

d v s $z = (x^2+2)e^y + yf(x^2+y) + g(x^2+y)$ där $f, g \in \mathcal{C}^2$ är godtyckliga envariabelfunktioner. Villkoret $z(x,0) = 0$ ger nu att $x^2 + 2 + g(x^2) = 0 \Leftrightarrow g(t) = -t-2$ d v s sökta partikulärlösningen blir

$$z = (x^2+2)e^y + yf(x^2+y) - x^2 - y - 2 = (x^2+2)(e^y-1) + y\,h(x^2+y)$$

där $h = f - 1 \in \mathcal{C}^2$ är en godtycklig envariabelfunktion.

7) Definitionen av partiell derivata ger att

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Vanliga deriveringsregler kan sedan användas för att derivera utanför origo, vilket ger

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$f'_x(x,y)$ är självklart kontinuerlig utanför origo. Betrakta

$$0 \le |f'_x(x,y)| = \frac{\left|\rho^3 \sin^3\varphi \cdot (\rho^2\sin^2\varphi - \rho^2\cos^2\varphi)\right|}{\rho^4} \le \rho|\sin^3\varphi|(|\sin^2\varphi| + |\cos^2\varphi|) \le \rho \to 0\,,\ \rho \to 0$$

där vi använt triangelolikheten i näst sista olikheten. Då ytterleden i denna olikhetskedja inte beror på φ följer det av instängningsregeln att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$ så $f'_x(x,y)$ är även kontinuerlig i origo. På samma sätt visas att

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

samt f själv är kontinuerliga i hela $\mathbf{R}^2$ så det följer att f är av klass $\mathcal{C}^1$. Vidare är

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f'_x(0,k)-f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3(k^2-0)}{(0+k^2)^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 1 = 1,$$

men

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot(3h^2+0)}{(h^2+0)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \neq 1 = f''_{xy}(0,0).$$

f:s blandade partiella andraderivator är alltså olika i origo, vilket visar att f *ej* är av klass $\mathcal{C}^2$.